

Notes de cours de Relativité Générale.

E. Huguet*
Université Paris Diderot-Paris 7.

18 janvier 2011

Préambule

La relativité générale d'Einstein, qui décrit la gravitation en tant que champ classique, apparaît en 1915. Son impact est très important à la fois sur le plan conceptuel (elle relie la structure de l'espace-temps à son contenu) et sur celui des prédictions (avance du périhélie de Mercure et déflexion des rayons lumineux¹...). Depuis lors cette théorie a été abondamment étudiée avec des retombées très importantes principalement en cosmologie et astrophysique, mais aussi plus récemment dans un domaine plus technologique avec le système GPS.

Le cours pour lequel ces notes ont été rédigées est une introduction à cette théorie. Son but est de donner les bases permettant de se faire une idée de la relativité générale et d'approfondir le sujet si besoin. Dans cette optique, les notions de géométrie nécessaires à la «mise en équations» des principes sont introduites parallèlement à la physique.

Après un rappel de relativité restreinte, nous présentons les deux hypothèses sur lesquelles se fonde la théorie : le principe d'équivalence et

les équations d'Einstein. Il est impossible dans le temps imparti de traiter ne serait-ce que les principales applications. Nous avons donc dû faire un choix en nous limitant au problème du «champ central» et à la cosmologie.

Sur un plan pratique, ces notes se divisent en deux parties : les sections 1 à 6 sont consacrées à la physique et la section 7 introduit ou rappelle le formalisme nécessaire. Un sommaire et une bibliographie sont donnés respectivement au début et la fin de ces notes. Des exercices sont inclus dans le corps du texte, ils font partie intégrante du cours : ils sont consacrés soit à des démonstrations soit à des exemples pratiques d'utilisation des notions introduites, il est donc *indispensable* de les traiter.

Pour finir, rappelons qu'il s'agit de *notes de cours* et non d'un cours à proprement parler, elles sont donc nécessairement incomplètes et le style y est très (trop) concis. Par ailleurs, elles comportent certainement (hélas!) des erreurs typographiques variées... Tous les commentaires sont appréciés et même encouragés!

*e-mail : huguet@apc.univ-paris7.fr

¹La première vérification observationnelle de ce phénomène est effectuée en 1919.

Table des matières		7 Formalisme	21
Preambule	1	7.1 Rappels de formalisme tensoriel . . .	21
Conventions	3	7.1.1 Notations	21
1 Introduction : Relativités	3	7.1.2 Composantes des vecteurs et des formes linéaires, base duale	21
2 Rappels de relativité restreinte	4	7.1.3 Les vecteurs en tant que formes, bidual	22
2.1 Transformations de Lorentz . . .	4	7.1.4 Applications multilinéaires, tenseurs, champs de tenseurs	22
2.2 Espace-temps et simultanéité . . .	5	7.1.5 Opérations sur les tenseurs	22
2.2.1 Diagrammes d'espace-temps	6	7.1.6 Espaces de tenseurs . . .	23
2.2.2 Simultanéité	7	7.1.7 Changement de base, critère de tensorialité . . .	23
2.3 Temps propre	7	7.1.8 Tenseurs constants	24
2.4 Covariance manifeste des lois de la physique en relativité restreinte	8	7.1.9 Tenseur métrique, espaces euclidiens et min-kowskiens	24
3 La Gravitation et le principe d'équivalence	9	7.1.10 Covecteurs, règles d'abaissement et de relèvement d'indices . . .	25
3.1 Décalage vers le rouge gravitationnel	10	7.1.11 Bases et systèmes de coordonnées	25
3.2 La particule libre dans un champ de gravitation	10	7.1.12 Dérivation dans les espaces euclidiens et min-kowskiens	26
3.3 Lien avec la gravitation newtonienne	11	7.2 Les espaces courbes	26
3.4 Principe de covariance et couplage minimal	12	7.2.1 Variétés différentiables . .	26
4 Les équations d'Einstein	12	7.2.2 Espace tangent, espace cotangent	27
5 Le champ statique isotrope	14	7.2.3 Bases et changement de base	28
5.1 Forme générale de la métrique statique isotrope	14	7.2.4 Champs de vecteurs et de tenseurs sur M	29
5.2 La solution de Schwarzschild . . .	15	7.2.5 Transport parallèle, dérivée covariante et connexion affine	29
6 Relativité générale et cosmologie	17	7.2.6 Géodésiques	32
6.1 Conséquences du principe cosmologique	17	7.2.7 Courbure et torsion . . .	32
6.2 La métrique de Robertson-Walker	18	7.2.8 Connexion et métrique . .	34
6.3 Le tenseur énergie-impulsion . . .	19	8 Références bibliographiques	37
6.4 Modèles d'univers	19		

Conventions

Dans toutes ces notes, sauf mention explicite, les composantes d'un vecteur V d'un espace de dimension n sont notées avec des exposants grecs ou plus rarement des exposants latins majuscules : V^μ , $0 \leq \mu \leq n-1$ ou V^A , $0 \leq A \leq n-1$. Dans le cas particulier de l'espace usuel à trois dimensions les vecteurs sont désignés par des caractères gras : \mathbf{V} . Leurs composantes sont notées avec des exposants latins : V^i , $i = 1, 2, 3$. Ainsi les composantes V^μ de $V \in \mathbb{R}^4$ sont V^0, V^1, V^2, V^3 et celles, V^i , de \mathbf{V} sont V^1, V^2, V^3 . Remarquons que la position des indices n'a réellement d'importance que dans un espace non-euclidien, il est cependant commode et prudent dans bien des calculs de la respecter.

Les éléments d'une matrice carrée ($n \times n$) A sont notés A_ν^μ , où μ est l'indice de la ligne, ν celui de la colonne²

Nous utilisons la convention de sommation sur les indices répétés, où convention d'Einstein, l'intervalle de variation des indices étant implicite. Par exemple, $x^{\mu_1} A^{\mu_1}{}_{\mu_1} \Lambda^\nu{}_{\mu_1}$ signifie :

$$\sum_{\mu_1=0}^{\mu_1=n-1} \sum_{\mu_1=0}^{\mu_1=n-1} x^{\mu_1} A^{\mu_1}{}_{\mu_1} \Lambda^\nu{}_{\mu_1}.$$

Il est important de noter que les indices sommés sont muets ($A_\sigma B^\sigma{}_\mu \equiv A_\nu B^\nu{}_\mu$) et que leur position verticale relative est sans importance ($A_\sigma B^\sigma{}_\mu = A^\sigma B_{\sigma\mu}$).

Le produit d'un vecteur V par une matrice A s'écrit donc : $A_\nu^\mu V^\nu$.

Le produit scalaire usuel de deux vecteurs de E_3 \mathbf{U}, \mathbf{V} est noté : $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$.

Le produit scalaire de deux vecteurs x, y est généralement noté : xy .

²Pour savoir quel est la position des indices ligne/colonne on peut se souvenir qu'un vecteur V se représente par une matrice colonne, l'indice du haut dans V^μ repère donc chaque ligne.

On note ∂_μ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. On écrira donc : $\partial A = \partial_\mu A^\mu$, A^μ désignant un champ de vecteurs.

La métrique (cf. section 7.1) de l'espace $E_{1,3}$ est $(+, -, -, -)$. On a donc en particulier :

$$x_0 = x^0, \quad x_i = -x^i$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_i x^i y^i = -x_i y^i = -\delta_{ij} x^i y^j.$$

Sauf mention explicite nous adopterons également un système d'unité où $\hbar = c = 1$.

1 Introduction : Relativité

La physique newtonienne postule au travers du *principe d'inertie* l'existence de référentiels particuliers dits *inertiels*. Ils persistent dans leur état de mouvement rectiligne uniforme, ou de repos, à moins qu'une force ne vienne le modifier. Le principe de relativité affirme l'équivalence de tous les observateurs inertiels, c'est-à-dire l'invariance des équations qui décrivent le système considéré lors du passage d'un repère inertiel à un autre. Dans le cadre de la physique newtonienne ce sont les *propriétés mécaniques* d'un *système mécanique* qui demeurent inchangées. Les changements de référentiels inertiels sont assurés par les transformations de Galilée.

Ex. 1.1 : Soit un système de n points matériels en interaction gravitationnelle. Dans le repère inertiel \mathcal{R}' leurs équations du mouvement s'écrivent :

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{x}'_i}{dt'^2} = G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j (\mathbf{x}'_j - \mathbf{x}'_i)}{\|\mathbf{x}'_j - \mathbf{x}'_i\|^3},$$

où le vecteur \mathbf{x}'_i repère le point matériel i .

Montrer qu'elles sont invariantes sous les transformations de Galilée :

$$\begin{cases} \mathbf{x}' &= R\mathbf{x} - \mathbf{v}t + \mathbf{a} \\ t' &= t + a_0, \end{cases} \quad (1)$$

où R désigne une matrice de rotation, \mathbf{v} le vecteur vitesse de \mathcal{R}' par rapport à un repère \mathcal{R} supposé fixe, \mathbf{a} un vecteur constant correspondant à

la translation spatiale et a_0 un réel qui permet le décalage de l'origine des temps.

Comme on le sait, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous ces transformations. Elles impliquent par ailleurs l'existence d'une vitesse constante de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide c . La relativité restreinte étend le principe de relativité au phénomènes électromagnétiques et prend en compte la constance de la vitesse de la lumière. Les transformations de Galilée sont remplacées par celles de Lorentz. La différence essentielle entre ces deux types de transformations réside dans le fait que les secondes «mélangent» les coordonnées d'espace et de temps, alors que les premières les traitent séparément. Ceci correspond à la profonde différence de structure entre l'espace-temps de la physique newtonienne et celui de la relativité restreinte. Le premier est décrit par $E_3 \times \mathbb{R}$ («espace×temps»), où E_3 désigne l'espace euclidien à 3 dimensions, c'est-à-dire \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel. Le second est l'espace de Minkowski $E_{1,3}$, c'est-à-dire \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire $xy = x^0y^0 - \mathbf{x}\mathbf{y}$.

Historiquement, si l'on exclu les prémisses de la mécanique quantique, ce sont bien les équations de Maxwell qui posent problème au regard de la physique du début du vingtième siècle. L'ajout au principe de relativité des lois de l'électromagnétisme semble donc permettre d'englober toutes les lois de la physique. En fait, la relativité restreinte ne donne pas une description correcte de la gravitation. L'ingrédient manquant est fourni par le lien entre inertie et gravité qui est résumé approximativement par l'énoncé : «Dans le vide tous les corps tombent à la même vitesse». Comme nous allons le voir, ce fait expérimental est à l'origine d'un *principe d'équivalence*, dont l'une des conséquences est que la relativité restreinte n'est valable que sur des échelles de longueur et de durée faibles devant les variations spatiales et temporelles du champ de

gravitation. La relativité restreinte devient, en quelque sorte locale. Conséquemment l'espace-temps n'est minkowskien que localement. Une nouvelle description de l'espace-temps est donc nécessaire, elle utilise le langage de la *géométrie différentielle* et plus particulièrement celui des espaces de Riemann. Mais elle fait surtout apparaître un lien entre la structure de l'espace-temps et la gravité. La relativité générale d'Einstein ne décrit plus indépendamment l'espace-temps et la matière : c'est le contenu en énergie de l'espace-temps qui détermine sa structure.

Notons pour clore cette introduction que la description de la gravitation introduite ici est classique. Rappelons que la mécanique quantique, qui est tout d'abord formulée dans un cadre Galiléen, apparaît chronologiquement après la relativité. Elle est ensuite généralisée dans le cadre de la relativité restreinte et donne naissance à la théorie des champs quantiques, qui est à la base du *modèle standard* de la physique des particules. Une étape supplémentaire consiste à étudier la théorie des champs quantiques en présence de gravitation, c'est-à-dire sur des espace-temps non-minkowskien. Mais, la prise en compte simultanée de la physique quantique et de la gravitation pose la question de la description quantique de l'interaction gravitationnelle elle-même, cette description est toujours l'objet de recherches.

2 Rappels de relativité restreinte

2.1 Transformations de Lorentz

Considérons une impulsion électromagnétique émise à l'origine d'un repère inertiel \mathcal{R} . L'espace étant supposé isotrope cette onde est sphérique. Le front de l'onde se déplaçant à la vitesse c le rayon \mathbf{x} de cette sphère à l'instant t est ct , on a donc : $(ct)^2 = \mathbf{x}^2$. Compte tenu

de la constance de la vitesse de la lumière la même équation sera valable dans tout autre repère inertiel \mathcal{R}' coïncidant à $t = 0$ avec \mathcal{R} , *i.e.* : $(ct')^2 = \mathbf{x}'^2$. On peut donc écrire :

$$(x^0)^2 - \mathbf{x}^2 = (x'^0)^2 - \mathbf{x}'^2, \quad (2)$$

où l'on a posé $x^0 = ct$.

On voit donc apparaître naturellement l'espace \mathbb{R}^4 et le *pseudo-produit scalaire*³ défini par :

$$xy := \eta(x, y) = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad (3)$$

L'espace \mathbb{R}^4 muni de ce produit constitue l'*espace de Minkowski* noté $E_{1,3}$ dans la suite.

Avec cette définition du produit scalaire, l'expression $(x^0)^2 - \mathbf{x}^2$ apparaît comme le carré de la *pseudo-norme* x^2 du vecteur x de \mathbb{R}^4 . Par ailleurs, on peut montrer que l'invariance (postulée) de x^2 entraîne celle du produit scalaire.

On est donc conduit à rechercher les transformations linéaires⁴ de \mathbb{R}^4 qui laissent invariante la forme quadratique x^2 ou plus généralement la forme :

$$(x - y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2, \quad (4)$$

obtenue si l'on considère l'onde émise à partir du point y dans \mathcal{R} . Ces transformations sont les transformations de Lorentz. Elles sont représentées dans l'espace de Minkowski par des matrices 4×4 notées Λ . Les transformations de Lorentz ayant pour déterminant $+1$ sont appelées transformations *propres*, celles ayant pour déterminant -1 transformations *impropres*. Les transformations telles que $\Lambda^0_0 \geq 1$ sont *orthochrones*, et celles telles que $\Lambda^0_0 \leq -1$ *antichrones*. L'ensemble des transformations propres (resp. impropres, orthochrones et antichrones) est noté L_+ (resp. L_- , L^\uparrow et L^\downarrow).

³Dans la suite nous omettrons le suffixe «pseudo» chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

⁴On peut montrer que le caractère linéaire découle de l'homogénéité supposée de l'espace-temps.

Toutes ces transformations, qui n'incluent pas les translations spatio-temporelles, sont qualifiées d'*homogènes*. Elles constituent le *groupe de Lorentz*. Lorsqu'on leur adjoint les translations spatio-temporelles on obtient le *groupe de Poincaré*. On distinguera également le sous-groupe de Lorentz (resp. Poincaré) restreint L_+^\uparrow (resp. \mathcal{P}_+^\uparrow) qui ne contient que les éléments connexes à l'identité. Les renversement de temps et d'espace (parité) en sont, en particulier, exclus.

Les *boosts*, c'est-à-dire les transformations de Lorentz homogènes, propres et orthochrones pour des repères ayant leurs axes parallèles et de mêmes orientations, suivant un vecteur vitesse \mathbf{v} de direction quelconque, sont fréquemment mises sous la forme :

$$\begin{aligned} \Lambda^j_i &= \Lambda^i_j = \delta^i_j - \beta^i \beta_j \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \\ \Lambda^j_0 &= \Lambda^0_j = \gamma \beta_j, \\ \Lambda^0_0 &= \gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

avec :

$$\beta^i := \frac{v^i}{c}, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

2.2 Espace-temps et simultanéité

Rappelons à présent les principales différences entre l'espace-temps de Newton lié à la relativité galiléenne et celui de Minkowski lié à la relativité restreinte d'Einstein.

Pour le physicien newtonien l'espace-temps est $E_3 \times \mathbb{R}$ («espace \times temps»), où E_3 désigne l'espace Euclidien à 3 dimensions, c'est-à-dire \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel. Un *événement* est repéré par le couple (\mathbf{x}, t) . Géométriquement cet espace-temps est une succession d'espaces Euclidiens à 3 dimensions, des 3-plans dans \mathbb{R}^4 (Fig. 1). Une droite interceptant ces 3-plans correspond à un observateur inertiel. Notons qu'ici deux événements sont simultanés s'ils sont contenus dans le même 3-plan.

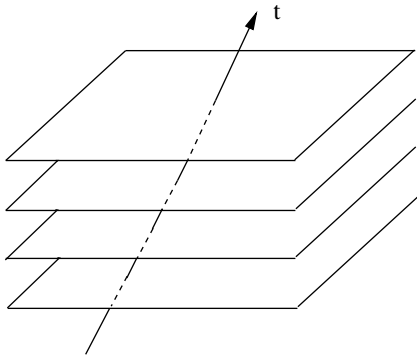


FIG. 1 – L'espace $E_3 \times \mathbb{R}$. L'angle entre les 3-plans et l'axe temporel n'a pas de sens puisqu'il n'y a pas de relation entre espace et temps.

L'espace-temps de la relativité restreinte est, comme nous l'avons vu, $E_{1,3}$. Un évènement est repéré par un point x de $E_{1,3}$. Par ailleurs, la relation $(x^0)^2 = \mathbf{x}^2$ (l'équation de propagation d'un signal lumineux), définit dans \mathbb{R}^4 une variété à 3 dimensions : un cône appelé *cône de lumière ou pseudo-sphère*. Cette 3-surface existe en chaque point de $E_{1,3}$ et en conditionne la structure temporelle et causale. Pour un observateur quelconque situé en un point O , l'espace-temps se divise en trois régions : *le passé* défini par les points situés dans et sur le cône inférieur, *le futur* défini par les points situés dans et sur le cône supérieur et *l'ailleurs* défini par l'espace restant (Fig. 2). Si un point M , quelconque de $E_{1,3}$, est situé à l'intérieur du cône passé ou futur (resp. sur le cône, dans l'ailleurs) l'intervalle séparant O de M est dit de *genre temps* (resp. de *genre lumière*⁵, de *genre espace*) et on a $OM^2 > 0$ (resp. $OM^2 = 0$, $OM^2 < 0$).

2.2.1 Diagrammes d'espace-temps

De nombreuses situations peuvent être représentées à l'aide de diagrammes d'espace-temps

⁵Dans le cas d'un vecteur on dit également *isotrope*.

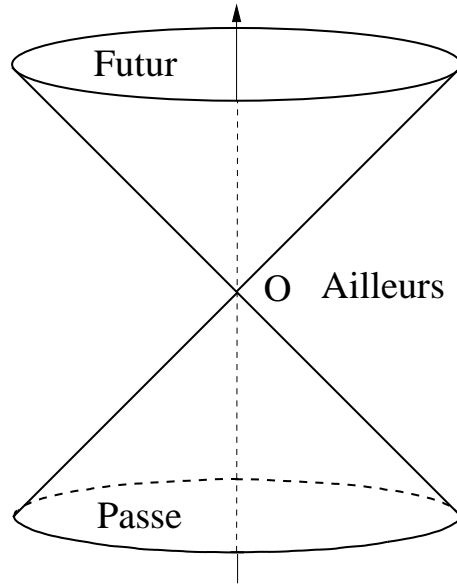


FIG. 2 – Les différentes régions liées à l'observateur situé en O : passé, futur et ailleurs. Seuls le passé et le futur sont liés causalement à O .

(Fig. 3). Il s'agit d'une traduction à deux dimensions (donc imparfaite) de la géométrie de $E_{1,3}$.

En posant $\text{ch}\varphi := \gamma$ et $\text{sh}\varphi := -\beta\gamma$ un boost de vitesse \mathbf{v} , le long de l'axe Ox s'écrit :

$$\Lambda_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \text{ch}\varphi & \text{sh}\varphi \\ \text{sh}\varphi & \text{ch}\varphi \end{pmatrix},$$

Le paramètre φ est appelé *rapidité* de la transformation.

Un changement de référentiel se traduit donc par une *rotation hyperbolique* d'angle φ : les axes Ot' et Ox' du repère \mathcal{R}' se rapprochent d'autant plus du cône de lumière⁶ (droite $x = c$) que la rapidité φ est élevée. A la limite $v \rightarrow c$, c'est-à-dire $\varphi \rightarrow \infty$, les deux axes se confondent avec la droite $x = c$. Du point de vue de l'observateur attaché au repère \mathcal{R}' , la durée d'un évènement dans \mathcal{R} , repéré par un

⁶La première bissectrice dans un système d'unité où $c = 1$.

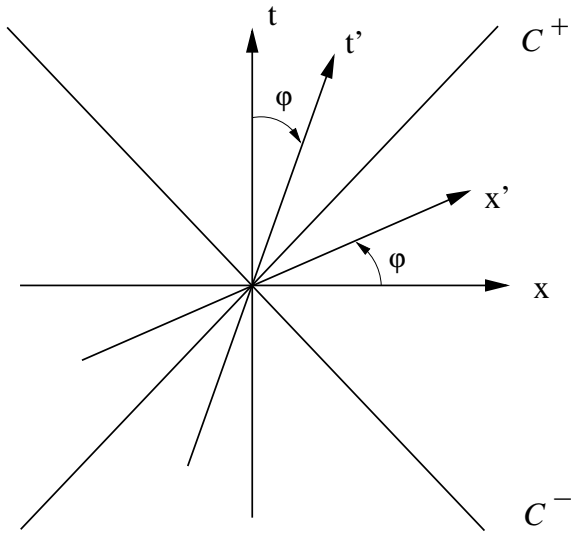


FIG. 3 – Diagramme espace-temps. Le cône est le même dans les deux référentiels inertiels.

point de l'axe Ot , se projette parallèlement à Ox' sur l'axe Ot' (dilatation apparente des durées). La longueur d'un objet repérée par un point de l'axe Ox dans \mathcal{R} se projette parallèlement à Ot sur l'axe Ox' (contraction apparente des longueurs). Remarquons que ces deux situations sont très différentes : alors qu'une mesure de durée (intervalle de genre temps) ne nécessite qu'une horloge, la mesure d'une longueur (intervalle de genre espace) nécessite l'envoi et la réception différée de signaux.

2.2.2 Simultanéité

Une conséquence majeure de la structure de l'espace-temps de Minkowski est que la notion de simultanéité est, contrairement au cas newtonien, *relative* à l'observateur. En effet, deux événements $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ simultanés pour un observateur donné, c'est-à-dire ayant pour coordonnées x_1 et x_2 avec $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$, se produiront pour un autre observateur en x'_1 et x'_2 avec $\Delta t' \neq 0$, comme on peut s'en rendre compte sur un diagramme d'espace-temps Fig. 3. Par

ailleurs, les mouvements inertiels sont encore des droites, de genre temps dans l'hypothèse de l'impossibilité des mouvements à des vitesses supérieures à c .

Avec les définitions précédentes deux événements ne pourront avoir un lien causal que s'ils sont reliés par un intervalle de genre temps ou de genre lumière. On voit apparaître ici la notion *d'horizon* : un observateur ne peut «voir» que les événements situés dans et sur son cône passé.

Ex. 2.1 :

1. Montrer, en utilisant un diagramme espace-temps, que pour deux événements séparés par un intervalle de genre espace :
 - (a) Il existe toujours un repère inertiel dans lequel ils sont simultanés.
 - (b) Il n'existe pas de repère inertiel dans lequel ils se produisent au même point.
2. Montrer, en utilisant un diagramme espace-temps, que pour deux événements séparés par un intervalle de genre temps :
 - (a) Il existe toujours repère inertiel dans lequel ils se produisent au même point.
 - (b) Il n'existe pas de repère inertiel dans lequel ils sont simultanés.
3. L'existence de tachyons, particules se déplaçant à des vitesses supraluminiques, est incompatible avec le principe de causalité. Pour le mettre en évidence on considère deux repères inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Le repère \mathcal{R}' se déplaçant à une vitesse $v < c$ par rapport à \mathcal{R} et étant situé en $x = x_1$ à $t = t' = t_0 = 0$.

Montrer, en utilisant un diagramme espace-temps, qu'il est possible pour un signal tachyonique émis en $t_0 = 0$ dans \mathcal{R} d'être reçu, après réflexion par un «miroir» dans \mathcal{R}' , en $t_1 < t_0$. On indiquera en particulier les axes des repères ainsi que les cônes de lumière.

2.3 Temps propre

Tout ce qui a été dit précédemment, en particulier au paragraphe 2.1, est également vrai pour des quantités infinitésimales, ainsi

$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ est un invariant. C'est également le carré de l'élément de «longueur» dans $E_{1,3}$. Considérons une trajectoire dans $E_{1,3}$ repérée par le vecteur x et paramétrée par λ , *i.e.* $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. On a :

$$dx^\mu = \frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda} d\lambda. \quad (6)$$

le carré de l'élément de longueur s'écrit donc :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda^2. \quad (7)$$

On peut alors définir l'intervalle de longueur d'une trajectoire de genre espace par :

$$dl := \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (8)$$

De même l'intervalle de temps propre pour une trajectoire de genre temps s'écrit :

$$d\tau := \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (9)$$

Ce dernier est la durée mesurée par une horloge liée au référentiel suivant la trajectoire $x(\lambda)$. En effet les coordonnées de l'observateur dans son référentiel sont toujours $(\tau, \mathbf{0})$.

Remarquons que pour une particule de masse non-nulle, dont la trajectoire est nécessairement de genre temps, poser $\lambda = \tau$ dans (9) montre que le long de cette trajectoire $x(\tau)$ on a :

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 1. \quad (10)$$

Pour une particule de masse nulle, la trajectoire est toujours de genre lumière, l'intervalle de temps propre est nul et on a sur $x(\lambda)$:

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (11)$$

Ex. 2.2 : Une particule de temps de vie propre τ est produite avec une vitesse v à l'instant $t_0 = 0$ dans le repère supposé inertiel du laboratoire puis se désintègre.

1. Préciser le problème : repères, données, dimensions d'espace-temps...
2. Faire un diagramme espace-temps de l'expérience.
3. Calculer l'expression de la durée de vie apparente de la particule. On posera le calcul matriciellement et en composantes.

2.4 Covariance manifeste des lois de la physique en relativité restreinte

Les objets mathématiques associés à la description relativiste des phénomènes physiques sont donc de nature quadridimensionnelle, ce qui nécessite de reformuler dans le cadre minkowskien toutes les lois de la physique. De plus, la forme de ces lois, *a priori* inconnue, doit être la même dans tous les systèmes d'inertie. La vérification explicite du principe de relativité, c'est-à-dire pratiquement de l'invariance lors d'un changement de repère inertiel, n'est pas toujours simple. Une formulation permettant d'éviter au maximum les vérifications explicites, *i.e.* où les propriétés d'invariance des lois de la physique sous les transformations de Lorentz sont mises en évidence, est indispensable. Le cadre naturel de cette formulation est celui des tenseurs (*cf* paragraphe 7.1).

Sur un plan pratique, le critère de tensorialité donné au paragraphe 7.1.7 permet d'affirmer que si une loi physique s'écrit $X = Y$, où X et Y sont des tenseurs de même type, alors cette égalité sera préservée dans un changement de base, ici une transformation de Lorentz. Une relation de ce type est dite *manifestement covariante*. Une relation manifestement covariante est donc invariante, la réciproque est fautive comme le montre la forme tridimensionnelle des équations de Maxwell.

Ex. 2.3 : *Effet Doppler*

On considère deux repères inertiels \mathcal{R}_o et \mathcal{R}_e ayant leurs axes parallèles et de mêmes orientations. Le repère \mathcal{R}_e est animé d'une vitesse constante v le long de $O_e x_e$. Une onde électromagnétique plane monochromatique est émise dans

le plan $\{O_e x_e, O_e y_e\}$ de \mathcal{R}_e , son vecteur d'onde \mathbf{k}_e fait avec l'axe $O_e x_e$ un angle θ_e . On cherche à déterminer la fréquence et la direction, dans \mathcal{R}_o , de l'onde observée. On rappelle que les équations de Maxwell dans le vide pour le 4-potentiel A s'écrivent :

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial A) = 0.$$

On se placera en jauge de Lorenz $\partial A = 0$ et on écrira la solution en onde plane monochromatique :

$$A(x) = \alpha(k) e^{-ikx}.$$

1. Rappeler les caractéristiques de cette solution : équation de dispersion, lien entre k et α ainsi que les relations reliant les pulsation ω , fréquence ν et le vecteur d'onde k . En déduire qu'il est suffisant d'étudier le comportement de k par changement de référentiel pour déterminer les grandeurs recherchées.
2. Ecrire, en tenant compte de la question précédente, le vecteur k_e , ainsi que la relation formelle qui le relie à k_o .
3. Calculer explicitement k_o en fonction de k_e et des différents paramètres de la transformation. En déduire θ_o et ν_o .
4. Que ce passe-t'il pour θ_o valant $0, \pi, \pi/2$? Comparer au cas non-relativiste.

3 La Gravitation et le principe d'équivalence

Les équations de la mécanique Newtonienne postulent, implicitement, l'équivalence entre la *masse inerte* m_I et la *masse grave* m_G . La première est le «coefficient de réponse» d'un corps soumis à une force extérieure $\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}$, la seconde est le «coefficient de couplage» du corps au champ de gravitation, l'analogue de la charge pour un champ électrique, qui détermine la force produite sur le corps par le champ $\mathbf{F}_{grav.} = m_G \mathbf{g}$. Ces deux masses n'ont *a priori* aucune raison d'être égales. Dans un champ de gravitation statique et homogène le principe fondamental de la dynamique *devrait* s'écrire : $m_I \mathbf{a} = m_G \mathbf{g}$. L'égalité *expérimentale* des masses inerte et grave conduit à ériger cette égalité en principe, dont une consé-

quence immédiate est l'énoncé quelque peu imprécis : «Dans le vide tous les corps tombent à la même vitesse». Un peu plus précisément, toujours dans le cas d'un champ statique et homogène, «Aucune expérience de mécanique interne ne peut distinguer entre un référentiel inertiel et un référentiel en chute libre». Si le champ de gravitation est quelconque cette propriété n'est vraie que sur des distances suffisamment petites et durant des intervalles de temps suffisamment courts, autrement dit *localement dans l'espace-temps*. On a alors le *principe d'équivalence faible* :

- *En chaque point de l'espace-temps, dans un champ de gravitation quelconque, il est toujours possible de choisir un système localement inertiel tel que toutes les lois de la mécanique y aient la même forme que dans un système de coordonnées cartésiennes inertiel en l'absence de gravité.*

C'est l'extension de ce principe à *toutes les lois de la physique* qui est à la base de la théorie de la gravitation d'Einstein : la relativité générale. Une formulation précise de ce principe est la suivante⁷ :

- *La masse inerte d'un corps est égale à sa masse grave.*
- *Le résultat de toute expérience locale est indépendante de la vitesse de l'appareillage dans un système en chute libre.*
- *Le résultat de toute expérience locale est indépendante de l'endroit et de l'époque où elle est réalisée.*

Deux manières condensées, moins précises mais commodes, d'énoncer le principe d'équivalence sont : «Il est toujours possible d'annuler *localement* les effets du champ de gravitation» et «L'espace-temps est *localement* minkowskien».

Examinons un peu plus le principe d'équivalence dans cette dernière formulation. La gravitation a, jusqu'à preuve du contraire, une por-

⁷Une introduction à cet aspect très fondamental des tests du principe d'équivalence se trouve dans [6].

tée infinie. Chaque corps, y compris les particules de masse nulle en raison de l'équivalence masse énergie, est donc en interaction gravitationnelle avec les autres corps de l'univers. On ne peut donc jamais s'affranchir de la gravitation. L'observateur inertiel minkowskien n'existe donc qu'approximativement, *i.e.* sur des échelles spatio-temporelles petites devant celles des variations du champ de gravitation. En conséquence, le mouvement de cet observateur minkowskien, représenté par une droite de $M_{1,3}$, n'existe que localement. Sa trajectoire spatio-temporelle globale, le mouvement le plus «droit» possible, appelé *géodésique*, est donc une courbe dans un espace-temps qui n'est $M_{1,3}$ que localement : l'espace, au sens mathématique, de la relativité générale est courbe et «localement comme $M_{1,3}$ », les observateurs inertiels suivent les géodésiques de l'espace-temps.

3.1 Décalage vers le rouge gravitationnel.

Considérons deux observateurs A et B , situés dans le vide, en mouvement uniformément accéléré de même accélération \mathbf{a} , portée par la droite passant par A et B , et de vitesses petites devant la vitesse de la lumière. On peut donc rapporter ces deux observateurs à un référentiel commun. L'observateur B , que nous supposons placé à une distance spatiale l en arrière de A , envoie à t_0 un photon de longueur d'onde λ_{em} vers A ⁸. L'observateur A reçoit le photon à t_1 tel que $\Delta t = t_1 - t_0 = l/c$. En Δt la vitesse des deux observateurs s'est accrue de $\Delta v = a\Delta t$.

⁸La situation décrite ici diffère du cas usuel où les deux observateurs sont animés chacun d'un mouvement de translation uniforme avec une différence de vitesses Δv . Dans ce cas, la longueur d'onde mesurée par A est égale à la longueur d'onde émise augmentée (et A et B s'éloignent l'un de l'autre) de l'accroissement de distance durant l'intervalle de temps séparant l'émission de deux fronts d'onde consécutifs, c'est-à-dire une période T_{em} . On a donc $\lambda_{obs} = \lambda_{em} + T_{em}\Delta v$. De la relation $\lambda_{em} = cT_{em}$ on tire : $z := \frac{\lambda_{re} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\Delta v}{c}$.

L'observateur A reçoit donc le photon à la longueur d'onde λ_{re} , avec un décalage Doppler :

$$z := \frac{\lambda_{re} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{al}{c^2}, \quad (12)$$

les deux premières égalités étant la définition de z et l'expression de l'effet Doppler usuel (*c.f.* note 8).

Le principe d'équivalence nous affirme que le décalage sera présent si l'accélération constante est d'origine gravitationnelle. C'est-à-dire s'il on imagine les observateurs A et B maintenus immobiles dans un champ gravitationnel uniforme de module a . Cet effet a été vérifié expérimentalement par R. Pound et G. Rebka en 1960.

Dans le cas d'un champ quelconque ce résultat persiste mais il ne s'obtient plus avec la seule utilisation du principe d'équivalence⁹.

3.2 La particule libre dans un champ de gravitation

Examinons comment le principe d'équivalence se traduit en équations pour le système physique «le plus simple» : une particule libre, c'est-à-dire en chute libre dans le champ de gravitation. Nous supposons que cette particule est de masse non nulle mais suffisamment faible pour ne pas modifier le champ de gravitation dans laquelle elle évolue. Elle est appelée pour cette raison *particule test*.

Le principe d'équivalence implique qu'il existe un système de coordonnées $\{x^{\mu'}\}$ particulier dans lequel les équations du mouvement de la particule ont la même forme que dans un système de coordonnées cartésiennes inertiel :

$$\frac{d^2 x^{\mu'}}{d\tau^2} = 0, \quad (13)$$

où l'on a paramétré la trajectoire de la particule par le temps propre $d\tau^2 = \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}$.

⁹On trouvera une généralisation au cas d'un champ statique dans [6].

Le passage à un autre référentiel non nécessairement inertiel (en rotation, accéléré,...) s'effectue en passant à un autre système de coordonnées $\{x^\mu\}$. En notant $J_{\mu'}^{\mu}$ la matrice jacobienne, que nous supposons inversible, de passage de $\{x^{\mu'}\}$ à $\{x^\mu\}$ on a :

$$\frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = J_{\mu'}^{\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

En dérivant cette relation par rapport à τ et en reportant dans l'équation (13) on a :

$$J_{\mu'}^{\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left(\frac{d}{d\tau} J_{\mu'}^{\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0.$$

En multipliant par $J_{\mu'}^{\delta}$ et en développant le second terme, l'équation précédente devient :

$$\frac{d^2 x^\delta}{d\tau^2} + J_{\mu'}^{\delta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} J_{\mu'}^{\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0,$$

soit encore en utilisant (93) et le fait que les symboles de connexion sont nuls pour $g = \eta$ (110) :

$$\frac{d^2 x^\delta}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\mu}^{\delta} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0.$$

Dans un système quelconque l'équation (13) d'une particule libre est donc, comme attendu, l'équation des géodésiques (102).

Pour une particule de masse nulle on ne peut plus paramétrer la trajectoire par le temps propre qui est nul. On peut choisir comme paramètre $\lambda := x^{0'}$, on a alors la relation (11). On peut alors reprendre les arguments précédent pour arriver à l'équation des géodésiques le paramètre λ remplaçant le temps propre τ .

Ex. 3.1 :

1. Montrer que l'équation des géodésiques est obtenue en faisant varier l'action d'une particule libre de masse unité :

$$S := \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}, \quad (14)$$

c'est-à-dire en déterminant la trajectoire $x(\tau)$, paramétrée par le temps propre, qui rend la rend extrémale.

2. Montrer que la variation de l'action :

$$S := \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right), \quad (15)$$

conduit au même résultat. En déduire une méthode de calcul des symboles de connexion.

3. Vérifier que (14) est invariante sous les reparamétrages $\lambda = a\tau + b$, a et b étant des constantes réelles positives, mais que (15) ne l'est pas.

Les géodésiques, qui correspondent de par leur définition en terme de transport parallèle au trajet «le plus droit» (101), apparaissent donc également comme le chemin «le plus court», au sens du temps propre.

3.3 Lien avec la gravitation newtonienne

Revenons un instant dans le cadre de la théorie de Newton et considérons une particule test, de masse unité, en chute libre dans un champ de gravitation décrit par le potentiel Φ , supposé statique. Les équations du mouvement de cette particule sont :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi. \quad (16)$$

Dans le cadre géométrique de la relativité générale cette particule suit une géodésique de l'espace-temps. Quels sont alors les coefficients de connexion qui correspondent au potentiel Φ ? Pour le voir rappelons qu'en mécanique newtonienne toutes les horloges attachées aux particules utilisent le temps absolu, éventuellement avec une origine décalée et à un facteur multiplicatif près, c'est-à-dire que le paramétrage temporel le plus général est : $\lambda = at + b$. On peut donc réécrire (16) :

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{d\lambda^2} + \nabla\Phi \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 0, \text{ avec } \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0.$$

En composantes, cette équation prend la forme :

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \partial^i \Phi \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 0, \text{ avec } \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0, \quad (17)$$

où l'on a utilisé la relation¹⁰ $\partial^i = \delta^{ij}\partial_j$. Par comparaison avec l'équation des géodésiques (102) on constate qu'il faut poser :

$$\Gamma^i_{00} = \delta^{ij}\partial_j\Phi, \quad (18)$$

avec tous les autres coefficients de connexion nuls pour retrouver le cas newtonien.

Ce résultat va nous être utile dans la recherche des équations relativistes du champ de gravitation, ainsi que dans la détermination de la solution de Schwarzschild.

3.4 Principe de covariance et couplage minimal

L'utilisation faite du principe d'équivalence au paragraphe 3.2 pour déterminer les effets du champ de gravitation, *i.e.* la forme des équations en relativité générale, comporte deux étapes : écrire les équations sous leur forme minkowskienne, puis effectuer un changement de coordonnées pour déterminer leur forme dans un référentiel quelconque. Ce changement de coordonnées devient vite impraticable pour des équations complexes. Cependant, il est possible de s'en affranchir grâce à une formulation alternative du principe d'équivalence souvent appelée *principe de covariance*, qui en un sens généralise cette méthode. Il s'énonce comme suit¹¹ :

1. Les équations restent valables en l'absence de gravité, *i.e.* elles ont leur forme covariante de la relativité restreinte dès que $g = \eta$ et que les symboles de connexion sont nuls.
2. Les équations sont covariantes, *i.e.* elles gardent la même forme sous un changement de coordonnées.

Cette formulation suggère une prescription simple pour obtenir la forme d'une équation

en relativité générale à partir de son écriture tensorielle en relativité restreinte : remplacer les dérivées par des dérivées covariantes et la métrique η par g . Cette prescription, qui permet d'inclure les effets de la gravité, c'est-à-dire le couplage au champ de gravitation s'appelle le *couplage minimal*. Par exemple, le premier groupe d'équations de Maxwell :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu,$$

devient en présence de gravité :

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu.$$

Une difficulté concerne les équations faisant intervenir des dérivées croisées, puisque à la différence de la dérivation ordinaire les dérivées covariantes ne commutent pas : $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \neq 0$. De telles équations devront être examinées au cas par cas.

4 Les équations d'Einstein

Nous avons vu que le principe d'équivalence conduisait, au travers d'une interprétation géométrique de l'espace-temps, à considérer ce dernier comme une variété différentiable de dimension quatre, localement minkowskienne. Dans ce cadre le choix d'une théorie métrique et d'une connexion compatible et symétrique découle d'un argument de simplicité. La théorie envisagée, celle d'Einstein, adopte donc une connexion de Lévi-Civita. La métrique y joue le rôle central : elle permet la détermination de toutes les grandeurs géométriques : symboles de connexion (110), tenseur de Riemann (115), *etc.* En ce sens la métrique «est» le champ de gravitation, ou plus précisément le potentiel gravitationnel. Il semble donc naturel de postuler l'existence d'équations régissant la dynamique de ce champ : les *équations d'Einstein*.

Comme dans beaucoup de situations en physique il n'existe pas de démonstration des équations d'Einstein, elle peuvent être obtenues

¹⁰Nous sommes ici dans E_3 , la métrique est δ_{ij} .

¹¹On trouvera une discussion dans [13].

par des méthodes différentes. Nous suivons ici une démarche phénoménologique qui prend pour point de départ d'une part, l'idée d'Einstein que les sources du champ de gravitation déterminent la géométrie de l'espace temps et, d'autre part, un «principe de simplicité».

La relation masse énergie $E = m$, affirme que toute forme d'énergie pèse et par conséquent est une source du champ. Nous cherchons donc une équation du type «géométrie = énergie». Une contrainte minimale *a priori* est que l'équation cherchée se réduise à la limite newtonienne, champs faibles et vitesses négligeables devant la vitesse de la lumière, à l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$. La géométrie, est entièrement déterminée par le tenseur métrique, le premier membre de l'équation précédente doit donc être construit à partir de g . La solution la plus simple ici est d'imposer une équation où les dérivées de la métrique sont du second ordre et apparaissent linéairement, comme dans l'équation de Poisson. Ceci suggère fortement la présence du tenseur de courbure, seul tenseur à posséder cette propriété. Le second membre de l'équation, quant à lui, est proportionnel au tenseur énergie-impulsion¹² $T_{\mu\nu}$ dont la forme est indéterminée mais qui doit contenir toutes les sources : matière et champs *autres* que le champ «géométrique» de gravitation. Ce tenseur étant toujours d'ordre deux il en va de même du membre «géométrie», le tenseur de Riemann (d'ordre quatre) est donc exclu mais pas ses contractions : le tenseur de Ricci et le scalaire de courbure. L'équation cherchée a donc pour forme :

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= CT_{\mu\nu}, \text{ avec} \\ K_{\mu\nu} &= AR_{\mu\nu} + B\mathcal{R}g_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

où A, B et C sont des constantes. Il est raisonnable à ce stade d'essayer direc-

¹²Nous n'étudierons pas faute de temps cet objet pourtant crucial. Une introduction se trouve dans [6] et une étude plus poussée dans [13].

tement $K_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ au vu de l'équation (122), c'est-à-dire de poser $A = 1$, $B = -(1/2)$ et, pour déterminer C , d'imposer de retrouver l'équation de Poisson à la limite des champs faibles pour de la matière non-relativiste.

Ex. 4.1 : Dans cette limite seule la composante $T_{00} = \rho$, ou ρ est la densité de matière, est non nulle. En effet, la source du champ se réduit à la masse ce qui correspond bien à une densité d'énergie¹³ ρ . On a donc :

$$\begin{cases} G_{00} = CT_{00} = C\rho \\ G_{i0} = 0 \\ G_{ij} = 0. \end{cases}$$

1. Montrer la relation $R^i_j = \frac{1}{2}\delta^i_j\mathcal{R}$. En déduire $\mathcal{R} = -2R^0_0$.
2. En admettant que $g_{00}R^0_0 \gg g_{i0}R^i_0$, montrer que $G_{00} = 2R_{00}$.
3. En supposant un potentiel newtonien Φ statique, montrer que $G_{00} = 2\Delta\Phi$, en déduire :

$$C = 8\pi G.$$

Nous obtenons finalement les *équations d'Einstein* :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (19)$$

Remarquons que comme le membre «géométrie» est un tenseur symétrique et conservatif, il doit donc en être de même du tenseur énergie impulsion. On a donc en particulier $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Si dans nos hypothèses nous n'exigeons plus du membre «géométrie» qu'il ne contienne que des dérivées du second ordre de la métrique, mais *jusqu'au* second ordre alors il est possible de rajouter un terme d'ordre zéro¹⁴ $\Lambda g_{\mu\nu}$. Les équations d'Einstein deviennent alors¹⁵ :

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (20)$$

¹³ ρc^2 , si l'on rétabli les facteurs c .

¹⁴Un terme du premier ordre n'apporterait rien de nouveau puisqu'il peut toujours être éliminé localement d'après la condition de compatibilité.

¹⁵Le signe « \rightarrow » devant Λ est conventionnel.

Λ étant la célèbre *constante cosmologique*. En présence de cette constante la limite non-relativiste ne conduit plus à l'équation de Poisson mais, tous calculs fait, à :

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda(1 + 2\Phi). \quad (21)$$

Actuellement, les observations conduisent à une valeur de Λ *non-nulle* mais très faible et donc compatible avec (21).

Ex. 4.2 : Montrer que dans le «vide», c'est-à-dire pour un tenseur énergie-impulsion nul $T = 0$, les équations d'Einstein (19, 20) se réduisent respectivement à :

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (22)$$

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (23)$$

Les équations d'Einstein permettent *a priori* de déterminer le champ de gravitation une fois connu le contenu en matière/énergie. Cependant, deux points sont à considérer. En premier lieu, les équations d'Einstein présentent un problème d'invariance de jauge analogue à celui rencontré pour les équations de Maxwell¹⁶ : le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$, qui est symétrique dans ses indices, possède 10 composantes indépendantes tout comme le tenseur métrique et le tenseur énergie impulsion, mais comme les identités de Bianchi imposent que $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ (cf. 122), soit 4 contraintes il ne reste que $10 - 4 = 6$ équations indépendantes. Les 4 degrés de libertés correspondent à la possibilité d'effectuer un changement de coordonnées arbitraire. En second lieu, les équations d'Einstein sont non-linéaires car elles incluent dans le membre géométrie le couplage du champ avec lui même.

Du fait de la complexité de ces équations le nombre de solutions analytiques connues est assez limité, même numériquement de nombreux

¹⁶Rappelons que pour $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, les équations de Maxwell se ramènent à : $\square A_\mu - \partial_\mu(\partial A) = j_\mu$, le vecteur j désignant le 4-courant. On a $\partial_\mu(\square A^\mu - \partial^\mu(\partial A)) = 0$, ce qui laisse $4 - 1 = 3$ équations pour les quartes composantes A_μ . Le degré de liberté correspond à l'invariance de jauge du champ A .

problèmes subsistent. Par chance certaines solutions parmi le «plus simples» présentent un intérêt majeur (c.f. sections 5 et 6 en particulier) et nombre de situations intéressantes sont accessibles par des approximations.

5 Le champ statique isotrope

Nous nous intéressons dans cette section au champ de gravitation statique a symétrie sphérique. C'est à dire invariant par les rotations spatiales autour d'un point fixe. On choisit habituellement ce point comme le centre d'un système de coordonnées minkowskiennes cartésiennes $\{x^\mu\}$ ou (spatialement) sphériques $\{x^0, r, \theta, \varphi\}$. Ce champ est le pendant relativiste du champ central newtonien, c'est donc en première approximation celui d'une planète, d'une étoile, d'un *trou noir*, ... Il est donc très important dans les applications.

5.1 Forme générale de la métrique statique isotrope

La forme générale de la métrique pour ce champ est donc invariante sous les rotations spatiales, en conséquence le carré de l'élément de longueur ne peut être construit que sur des quantités elles aussi invariantes : $dt^2, dr^2, dt dr$ et $r^2 d\Omega^2$, où $r^2 d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ est le carré de l'élément de surface de la 2-sphère et $t = x^0$. On peut donc poser¹⁷ :

$$d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - 2C(r)drdt - D(r)r^2d\Omega^2, \quad (24)$$

où les fonctions A, B, C et D sont indéterminées mais ne dépendent que du module du rayon r . Le principe de covariance nous permet d'effectuer tous les changements de coordonnées respectant les symétries. On peut ainsi

¹⁷Il est possible de démontrer rigoureusement cette relation. Il faut pour cela préciser la notion symétrie sur une variété grâce aux *vecteurs de Killing*. Cette notion est introduite en particulier dans [2].

s'affranchir du terme non-diagonal en $drdt$ et ramener le coefficient de la partie angulaire à l'unité. En renommant les fonctions on aboutit alors à la *forme standard* du carré de l'élément de longueur :

$$d\tau^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (25)$$

Les composantes non-nulles de la métrique sont donc :

$$\begin{aligned} g_{tt} &= A(r), & g_{rr} &= -B(r), \\ g_{\theta\theta} &= -r^2, & g_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Ex. 5.1 :

1. Montrer qu'en posant $t' := t + f(r)$ dans (24) et en choisissant convenablement la fonction f on peut éliminer le coefficient de $drdt$.
2. De manière analogue montrer que poser $r'^2 := D(r)r^2$ dans l'expression obtenue conduit à redéfinir le coefficient de dr^2 .

La métrique étant connue les symboles de connexion et les composantes du tenseur de Ricci en découlent. On a en utilisant (111-114) puisque g est diagonale :

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{2} \frac{A'}{A}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{2} \frac{B'}{B}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} \frac{A'}{B}, \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{B}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r}{B} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \cotg \theta, \end{aligned}$$

les autres symboles sont nuls. Le prime ' désigne la dérivation par rapport à r . Les composantes du tenseur de Ricci se calculent via

(103) on obtient :

$$R_{tt} = +\frac{1}{2} \frac{A''}{B} + \frac{1}{r} \frac{A'}{B} - \frac{1}{4} \frac{A'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right), \quad (26)$$

$$R_{rr} = -\frac{1}{2} \frac{A''}{A} + \frac{1}{r} \frac{B'}{B} + \frac{1}{4} \frac{A'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right), \quad (27)$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B}, \quad (28)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}, \quad (29)$$

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si} \quad \mu \neq \nu. \quad (30)$$

5.2 La solution de Schwarzschild

Examinons, à présent, comment la métrique statique isotrope obtenue précédemment peut constituer une solution des équations d'Einstein. Elle s'interprète comme le champ de gravitation produit à l'extérieur d'une source centrale d'extension finie. Les équations d'Einstein se réduisent donc à annuler le tenseur de Ricci (22). Les conditions aux limites proviennent de la décroissance du champ avec la distance spatiale à la source, qui impose de retrouver un espace minkowskien à l'infini, *i.e.* que les fonctions $A(r)$ et $B(r)$ tendent vers 1 dans cette limite.

Remarquons tout d'abord que les expressions (26) et (27) de R_{tt} et R_{rr} donnent :

$$\frac{R_{tt}}{A} + \frac{R_{rr}}{B} = \frac{1}{r} \left(\frac{B'}{B^2} + \frac{A'}{AB} \right),$$

soit encore puisque $R_{\mu\nu} = 0$,

$$\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} = 0,$$

ce qui impose, compte tenu des conditions aux limites,

$$AB = 1.$$

Les équations d'Einstein se réduisent donc à :

$$\begin{cases} A'' + 2 \frac{A'}{r} = 0, & (R_{tt} = 0), \\ rA' + A - 1 = 0, & (R_{rr} = 0, R_{\theta\theta} = 0). \end{cases}$$

La seconde équation de ce système se réécrit $(rA)' = 1$, qui s'intègre pour donner :

$$A(r) = 1 + \frac{K}{r},$$

où K est la constante d'intégration. On vérifie que cette expression est bien compatible avec la première des équations du système précédent. Pour déterminer la constante K on examine la limite newtonienne. Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.3, les symboles de connexion non-nuls, sont donnés dans cette limite par (18). Par ailleurs, l'approximation newtonienne implique des champs faibles, c'est-à-dire tels que $g = \eta + h$, où h est une perturbation ici indépendante du temps, précisément $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ et $\partial_t h_{\mu\nu} = 0$. En portant cette expression de la métrique dans l'équation (110) donnant les symboles de connexion on obtient :

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00}. \quad (31)$$

En rétablissant la notation $0 \rightarrow t$ et en comparant à (18), on obtient : $h_{tt} = 2\Phi$. Soit encore :

$$g_{tt} = A(r) \simeq 1 + 2\Phi.$$

L'expression d'un potentiel central newtonien, pour une distribution de masses M , étant : $\Phi(r) = -\frac{GM}{r}$, on en déduit la constante $K = -2GM$. Finalement la métrique du champ statique isotrope dans le vide solution des équations d'Einstein est donnée par :

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (32)$$

Cette métrique est historiquement la première des solutions exactes des équations d'Einstein, elle a été découverte en 1916 par K. Schwarzschild et a joué un rôle important

dans les tests de la relativité générale : déflexion des rayons lumineux et avance du périhélie de Mercure.

On peut remarquer que la valeur particulière de $r = R_G := 2GM$, appelée *rayon de Schwarzschild* ou *rayon gravitationnel*, rend le second terme de (32) singulier. En fait, cette singularité provient du système de coordonnées et ne correspond pas à un comportement singulier du tenseur de courbure¹⁸. En revanche, la 3-surface définie par $r = R_G$ sépare l'espace en deux régions, et on peut montrer qu'aucun événement pour lequel $r < R_G$ ne peut influencer la région située en $r > R_G$. Pour cette raison, la 3-surface définie par $r = R_G$ est appelée un *horizon d'événements*. Une conséquence astrophysique est que si le rayon d'un astre est inférieur à son rayon de Schwarzschild aucun photon ne peut s'en échapper, d'où la terminologie de *trou noir* de Schwarzschild. En fait, seules certaines étoiles en fin d'évolution sont dans ce cas, pour les autres, le rayon de l'étoile est supérieur à son rayon gravitationnel et comme la solution de Schwarzschild n'est valide que dans le vide, R_G n'est associé à aucun phénomène physique particulier dans ce cas.

Une dernière remarque est qu'il est possible de montrer¹⁹ que la solution de Schwarzschild est *l'unique* solution isotrope dans le vide. Autrement dit un champ de gravitation à symétrie sphérique dans le vide est toujours *statique*. Ce résultat constitue le *théorème de Birkhoff*.

Ex. 5.2 : Nous esquissons dans cet exercice l'étude des trajectoires possibles dans un champ central statique.

1. Pourquoi peut-on fixer $\theta = \frac{\pi}{2}$ sans perte de généralité ?
2. Écrire l'équation des géodésiques $x(\lambda)$ dans ce cas. On utilisera un paramétrage (λ) permettant de considérer le cas masse nulle.
3. Dédire des équations pour t et φ deux constantes du mouvement, c'est à dire des

¹⁸On pourra consulter [2] pour une discussion de ce point.

¹⁹Une démonstration se trouve dans la référence [13].

fonctions f telles que $\frac{df}{d\lambda} = 0$, que l'on notera E et J respectivement.

4. En utilisant le fait que $\dot{x}^2(\lambda)$ est constant le long d'une géodésique, montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V_{eff}(r) = \frac{E^2}{2},$$

où $V_{eff}(r)$ est un potentiel «effectif» que l'on précisera.

5. Tracer approximativement $V_{eff}(r)$ et comparer au cas newtonien correspondant.

6 Relativité générale et cosmologie

Quelle est la structure de notre univers ? Du point de vue de la relativité générale c'est une variété quadridimensionnelle M dont la géométrie est reliée à son contenu énergétique par les équations d'Einstein. Ces équations permettent d'en décrire la dynamique une fois connus la métrique, le tenseur énergie-impulsion et la constante cosmologique.

Les observations montrent qu'à grande échelle (au-delà de ~ 100 Mpc) l'univers est très raisonnablement homogène et isotrope. A ces échelles, les galaxies²⁰ sont des objets ponctuels et la répartition des autres constituants (gaz, champs magnétiques etc...) permet de considérer la matière comme un fluide. On a donc une approximation de la forme générale du tenseur énergie-impulsion : celui d'un fluide homogène et isotrope.

Ces observations confortent, par ailleurs, l'adoption du *principe cosmologique* qui stipule *qu'aucun observateur n'occupe de position privilégiée dans l'univers*. Comme nous allons le voir, ce principe fournit les contraintes nécessaires à la détermination de la métrique. La constante cosmologique doit, quant à elle, être mesurée.

²⁰Leur dimension caractéristique est $\sim 10kpc$.

D'autres observations jouent un rôle majeur dans les contraintes à imposer aux modèles cosmologiques, ce sont principalement :

- La récession des galaxies, observée pour la première fois par E. Hubble en 1929. Les galaxies s'éloignent de notre Galaxie d'autant plus rapidement que leur distance est élevée. Ce phénomène est à présent attribué à l'expansion de l'univers.
- L'existence d'un rayonnement de fond cosmologique. Découvert par A. Penzias et R. Wilson en 1965, son spectre de corps noir à 2.7 K a été observé dans son entier pour la première fois par le satellite COBE au début des années 1990. Ce rayonnement, prédit par les modèles de «big bang» est interprété comme la trace du découplage rayonnement/matière au «début» de l'histoire de l'univers.
- L'abondance de divers éléments légers, principalement l'hydrogène, l'hélium et le lithium. Presque tous les éléments sont produits par les étoiles, cependant les éléments légers sont trop abondants pour être *uniquement* d'origine stellaire. Les modèles de «big bang» actuels sont en bon accord avec les observations.

Nous utiliserons uniquement le premier de ces résultats qui se traduit entre autres par une augmentation, à l'époque actuelle, du *facteur d'échelle a* défini au paragraphe 6.2.

6.1 Conséquences du principe cosmologique

Dire que l'univers est *homogène* signifie, en particulier, que la densité est la même partout à *un instant donné*. Une telle notion n'a, *a priori*, pas de sens en relativité générale puisqu'il n'existe pas de repère inertiel global. Ainsi le principe cosmologique implique nécessairement la définition un *temps universel*. A une valeur de la densité correspond un instant, le temps cosmologique est en ce sens défini par

la densité. Cela se traduit par le fait qu'il est toujours possible de décomposer localement la variété d'espace-temps M en un produit partie spatiale, partie temporelle : $V_3 \times \mathbb{R}$. Cela revient à considérer un ensemble de variétés spatiales : une à chaque instant. La métrique peut donc se mettre sous la forme générale :

$$ds^2 = dt^2 - d\xi^2(t),$$

$d\xi^2$ étant la métrique de la partie spatiale. La coordonnée t est le temps propre d'un *observateur fondamental* dont la ligne d'univers est, par définition, orthogonale aux variétés spatiales V_3 . Un tel observateur est, par définition, en mouvement avec le fluide cosmologique, c'est-à-dire «en chute libre dans l'univers».

Nous pouvons, à présent, préciser la notion d'isotropie contenue dans le principe cosmologique : pour un observateur fondamental quelconque V_3 est isotrope à chaque instant. Cette notion d'isotropie *quelque soit la position*, implique en fait l'homogénéité. Pour le voir considérons à un instant fixé t une variété spatiale V_3 et un premier observateur situé en un point O de V_3 , l'isotropie impose que la densité ρ ne dépende que de la distance à O : sur une sphère de rayon r , centrée en O , la densité est $\rho(r)$. La même constatation vaut pour un observateur situé en un autre point O' , cet observateur peut considérer un sphère de rayon r' suffisamment grand pour que les deux sphères aient une intersection. Sur l'intersection on a nécessairement $\rho(r) = \rho(r')$ donc également sur chacune des sphères. Cette construction peut être étendue à toute la variété spatiale, finalement ρ est constant sur V_3 .

6.2 La métrique de Robertson-Walker

L'isotropie a une autre conséquence importante : les distances sur les variétés spatiales ne

peuvent varier que d'un *facteur d'échelle* commun $a(t)$. En effet, si l'on considère trois observateurs fondamentaux situés aux sommets d'un triangle sur une variété spatiale à un instant t , ils seront toujours aux sommets d'un triangle à un instant t' les deux triangles devant être semblables en raison de l'isotropie. La métrique spatiale s'écrit donc nécessairement $d\xi^2(t) = a^2(t)d\sigma^2$, où $d\sigma^2$ ne dépend pas du temps t . Pour préciser $d\sigma^2$ introduisons sur V_3 un système de coordonnées (x^1, x^2, x^3) , dites *comobiles*, dans lequel les observateurs fondamentaux ont des positions *constantes* au cours du temps. Dans un tel système on a :

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (33)$$

où γ désigne la métrique sur V_3 .

On peut montrer²¹ que la métrique spatiale homogène et isotrope la plus générale s'écrit :

$$d\sigma^2 = \frac{1}{(1 + \frac{1}{4}kr'^2)^2} \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (34)$$

avec $r' = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ et $k = 0, \pm 1$. En posant successivement :

$$\begin{cases} x^1 = r' \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 = r' \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 = r' \cos \theta, \end{cases}$$

puis

$$r = \frac{r'}{1 + \frac{1}{4}kr'^2}, \quad (35)$$

on obtient :

$$d\xi^2 = a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right). \quad (36)$$

Cette métrique spatiale regroupe trois cas distincts :

²¹Comme pour la métrique statique isotrope, la démonstration s'effectue en utilisant la notion de vecteur de Killing. On pourra consulter [2] et [13].

$k = 0$: univers spatialement plat de volume infini.

$k = +1$: univers de courbure spatiale positive de volume fini.

$k = -1$: univers de courbure spatiale négative de volume infini.

Ex. 6.1 :

$k = 0$: Montrer que ce cas correspond à l'espace E_3 . Quelle est la distance entre deux points ? quel est le volume de cet espace ?

$k = +1$: On se propose de montrer que ce cas correspond à une sphère à trois dimensions (une 3-sphère). On considère l'espace Euclidien à quatre dimensions. Les coordonnées cartésiennes orthogonales sont notées (w, x, y, z) .

1. Quelle est la métrique de cet espace ?
2. Quelle est l'équation d'une 3-sphère de rayon R dans cet espace ?
3. Montrer que la 3-surface définie par le système paramétrique suivant est une 3-sphère :

$$\begin{cases} w = R \cos \psi \\ x = R \sin \psi \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \sin \psi \cos \theta \end{cases} \quad (37)$$

avec $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

4. Calculer la métrique sur cette 3-sphère, montrer qu'elle est égale à (36) si l'on pose $\sin \psi = r$.

$k = -1$: Ce cas correspond à un hyperboloïde dans un espace de Minkowski²² L'équation d'une telle surface est :

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2 \quad (38)$$

Nous allons procéder de manière analogue au cas $k = +1$.

1. Montrer que la 3-surface définie par le système paramétrique suivant satisfait (38) :

$$\begin{cases} w = R \operatorname{ch} \psi \\ x = R \operatorname{sh} \psi \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \operatorname{sh} \psi \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \operatorname{sh} \psi \cos \theta \end{cases} \quad (39)$$

²²Cet espace joue ici le même rôle que l'espace Euclidien E_3 pour la 2-sphère ordinaire : il sert à «visualiser» la surface, c'est ce que l'on appelle un espace de plongement. Il n'a pas de signification physique.

avec $0 \leq \psi \leq +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

2. Calculer la métrique sur cet hyperboloïde, montrer qu'elle est égale à (36) si l'on pose $\operatorname{sh} \psi = r$.
3. Montrer que le volume de cet espace est infini.

Finalement, la métrique la plus générale pour un univers homogène et isotrope, la métrique de *Robertson-Walker*, s'écrit :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right), \quad (40)$$

6.3 Le tenseur énergie-impulsion

Pour établir la dynamique de l'univers homogène et isotrope il nous faut, hormis la métrique, le tenseur énergie-impulsion T . Comme nous l'avons vu au début de cette section l'approximation d'un fluide homogène et isotrope est valable aux grandes échelles auxquelles nous nous intéressons. Nous ferons l'hypothèse du *fluide parfait*, c'est-à-dire sans phénomène de transport. Son expression minkowskienne sous forme matricielle dans un référentiel au repos est $T^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(\rho, p, p, p)$, où ρ représente la densité d'énergie²³ et p la pression. On peut montrer que cette expression se généralise à :

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}, \quad (41)$$

où u est la quadrivitesse de la matière.

6.4 Modèles d'univers

La métrique de Robertson-Walker et le tenseur énergie-impulsion permettent de réécrire les équations d'Einstein sous la forme :

$$\dot{a}^2 - \left(8\pi G \frac{\rho}{3} + \frac{1}{3} \Lambda \right) a^2 + k = 0 \quad (42)$$

$$2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + (8\pi G p - \Lambda) a^2 + k = 0 \quad (43)$$

²³Il est d'usage en cosmologie d'utiliser la notation ρ (ρc^2 dans un système ou $c \neq 1$) pour la densité d'énergie.

L'obtention de ces équations passe par le calcul, direct mais fastidieux, des composantes de $g^{\mu\nu}$, des symboles de Christoffel, des composantes du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure. Si l'on adjoint à (42- 43) une équation d'état $p = p(\rho)$ on peut, en principe, obtenir $p(t), \rho(t)$ et le facteur d'échelle $a(t)$.

Ces modèles se divisent en deux classes : ceux pour lesquels $\Lambda = 0$ appelés modèles de *Friedmann* et ceux avec $\Lambda \neq 0$ appelés parfois modèles de *Friedmann-Lemaître*. Un aperçu des modèles de Friedmann est donné dans l'exercice ci-dessous. Une de leurs caractéristiques commune est l'existence d'une origine des temps, *i.e.* un temps t_x pour lequel $a = 0$. On choisit cet instant comme origine des temps de sorte que $a(0) = 0$. Cela ne signifie pas que l'univers ait réellement une origine, la physique connue n'étant certainement plus valable pour des t suffisamment faibles, mais fournit une échelle de temps commode. Une phrase comme : « n minutes après le big bang» se rapporte à un modèle (où une classe de modèles) particulier.

Ex. 6.2 : Nous nous plaçons ici dans le cas $\Lambda = 0$. Nous supposons de plus que $p + \frac{\rho}{3} \geq 0$.

1. Montrer que les équations (42- 43) se réécrivent :

$$\begin{cases} \dot{a}^2 - \kappa \rho a^2 + k = 0 \\ \ddot{a} + \frac{3}{2}\kappa(p + \frac{1}{3}\rho)a = 0 \end{cases} \quad (44)$$

avec $\kappa = \frac{8\pi G}{3}$.

2. Montrer que $a(t)$ a sa concavité tournée vers les $t > 0$.
3. Montrer à partir de (44) que l'on a :

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (45)$$

En déduire :

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3pa^2 \quad (46)$$

4. Que devient la première des équations (44) pour $t \rightarrow +\infty$ dans les cas $k = -1$ et $k = 0$? En déduire la forme de $a(t)$ dans chacun de ces cas, commenter.

5. Montrer que pour $k = +1$ il existe un t_m tel que $\dot{a}(t_m) = 0$. En déduire la forme de $a(t)$, commenter.

L'observation des supernovae très lointaines (à haut «redshift» $z \gtrsim 1$) en 1998 par deux équipes indépendantes («Supernovae Search Team» et «Supernovae Cosmology Project») a donné une forte indication en faveur des modèles à constante cosmologique non-nulle.

Le principe de ces observations repose sur le fait que les supernovae en question sont de type I. Le type d'une supernovae est associé à la présence ou non dans son spectre de certains éléments. Dans les supernovae de type I les raies de l'hydrogène sont absentes. Cette classification observationnelle recouvre deux mécanismes physiques différents correspondants aux types SN-I et SN-II, SN-III respectivement. Les SN-I sont en fait des systèmes binaires comprenant une naine blanche au voisinage de la masse de Chandrasekar ($\sim 1.4 M_\odot$), c'est-à-dire une étoile où la gravitation est compensée par la pression de dégénérescence des électrons, et une étoile compagne. Dans ces systèmes, la naine blanche accrète la matière de l'étoile compagne jusqu'à déclencher sa propre explosion. La masse à l'explosion étant voisine de la masse de Chandrasekar on peut en déduire la luminosité intrinsèque de l'étoile²⁴ et donc sa distance, qui dépend du modèle d'univers utilisé.

Depuis lors d'autres types d'observations ont été effectuées et les résultats, dans leur ensemble excluent, avec une bonne fiabilité, le cas $\Lambda = 0$. Conséquemment, les modèles de Friedmann purs ne sont plus valables et doivent être remplacés par les modèles type Friedmann-Lemaître. Dans ces derniers la dynamique devient plus complexe, il existe en particulier des modèles où $a(t)$ est toujours positif (pas d'origine des temps). Par ailleurs, l'effet du terme en Λ est de produire une expansion *accélérée*.

²⁴Ce type d'objet astrophysique dont la luminosité intrinsèque peut être déterminé théoriquement est appelé *chandelle standard* («standard candle»).

Le point important ici est certainement le problème posé par la signification de la constante cosmologique Λ . L'alternative *a priori* la plus simple est que la constante cosmologique soit une nouvelle constante fondamentale. Cela motive une part des observations actuelles qui visent à mettre en évidence d'éventuelles variations de Λ . Une autre interprétation couramment envisagée est obtenue en déplaçant le terme $g^{\mu\nu}\Lambda$ du membre «géométrie» au membre «énergie» des équations d'Einstein ce qui s'écrit :

$$G^{\mu\nu} = 8\pi GT^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (47)$$

Comme toute la densité d'énergie «matérielle» est contenue dans le terme $T^{\mu\nu}$ le terme $\Lambda g^{\mu\nu}$ est donc interprété comme la *densité d'énergie du vide*. Dans ce cas l'interprétation en terme de «fluide» pose le problème de son équation d'état, cette composante ayant une *pression négative*. De plus, la valeur actuellement déduite des observations pour cette densité d'énergie semble incompatible avec l'estimation provenant des théories quantiques décrivant les particules et leurs interactions : elle est au mieux soixante ordres de grandeur plus élevée ! Une autre possibilité, est que la description utilisée, *i.e.* la relativité générale ne soit en fait pas valable...

En l'absence d'indications déterminantes sur sa nature, l'énergie associée à la «constante» cosmologique est appelée *énergie sombre* («dark energy»). La valeur actuelle de Λ indique qu'elle constitue plus de 75% de l'énergie de l'univers ! Le reste étant composé majoritairement de *matière sombre*, *i.e.* dont on détecte les effets mais qui n'est pas directement observée et dont la nature est pour une large part inconnue, et de «traces» de matière visible : les étoiles suffisamment brillantes.

7 Formalisme

7.1 Rappels de formalisme tensoriel

7.1.1 Notations

Sauf mention explicite, E, E_1, E_2, \dots , désignent des espaces vectoriels de dimension finie n sur \mathbb{R} . L'ensemble de vecteurs $\{e_\mu\}$ (resp. $\{e_{\mu_i}\}$), désigne une base de E (resp. E_i).

x, x_1, \dots et ω, ω_1, \dots , désignent respectivement des vecteurs de E, E_1, \dots et des formes linéaires de E^*, E_1^*, \dots .

7.1.2 Composantes des vecteurs et des formes linéaires, base duale

On considère le dual E^* de E , c'est-à-dire l'ensemble des applications (ou formes) linéaires à valeurs scalaires sur E . L'espace E^* est muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} . L'addition et la multiplication par un scalaire étant définies par :

$$\begin{aligned} \forall \omega_1, \omega_2 \in E^*, \forall x \in E, \\ (\omega_1 + \omega_2)(x) &= \omega_1(x) + \omega_2(x), \end{aligned}$$

$$\forall \omega \in E^*, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda\omega)(x) = \lambda\omega(x).$$

Soit $e^{*\mu}$ l'application de E dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in E, e^{*\mu}(x) := x^\mu. \quad (48)$$

$e^{*\mu}$ est une forme linéaire sur E .

- En effet : soient $x, y \in E, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $z = \alpha x + \beta y$. On a successivement :

$$\begin{aligned} z^\mu &= \alpha x^\mu + \beta y^\mu \\ e^{*\mu}(z) &= \alpha e^{*\mu}(x) + \beta e^{*\mu}(y) \\ e^{*\mu}(\alpha x^\mu + \beta y^\mu) &= \alpha e^{*\mu}(x) + \beta e^{*\mu}(y). \end{aligned}$$

On a en particulier :

$$e^{*\mu}(x) = e^{*\mu}(x^\nu e_\nu) = x^\nu e^{*\mu}(e_\nu),$$

ce qui montre par comparaison avec (48) que

$$e^{*\mu}(e_\nu) = \delta^\mu_\nu. \quad (49)$$

Pour une forme ω quelconque de E^* on a :

$$\omega(x) = \omega(x^\mu e_\mu) = \omega(e_\mu) x^\mu = \omega(e_\mu) e^{*\mu}(x).$$

On pose $\omega_\mu := \omega(e_\mu)$, on a donc :

$$\omega = \omega_\mu e^{*\mu}. \quad (50)$$

Toute forme linéaire ω se développe donc sur les $e^{*\mu}$ de plus cette décomposition est unique.

- Si $\omega = \omega'_\mu e^{*\mu}$ on a d'une part $\omega(e_\nu) = \omega'(e_\mu) \delta^\mu_\nu$ et d'autre part $\omega(e_\nu) = \omega(e_\mu) \delta^\mu_\nu$ d'où $\omega_\mu = \omega'_\mu$.

Donc $\{e^{*\mu}\}$ est une base de E^* , dite *base duale* de $\{e_\mu\}$ en raison de (49). Les quantités ω_μ sont les composantes de la forme linéaire ω dans la base $\{e^{*\mu}\}$.

L'action d'une forme linéaire²⁵ ω sur un vecteur x est donc calculée à partir de leurs composantes par :

$$\omega(x) = \omega_\mu x^\mu.$$

7.1.3 Les vecteurs en tant que formes, bidual

L'ensemble des formes linéaires sur E^* , le *bidual* de E , est aussi un espace vectoriel sur \mathbb{R} , noté E^{**} . On peut montrer que les deux espaces E et E^{**} sont isomorphes.

- L'addition et la multiplication par un scalaire sont définies par : $\forall x^{**}, y^{**} \in E^{**}, \forall \omega \in E^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(x^{**} + y^{**})(\omega) = x^{**}(\omega) + y^{**}(\omega),$$

$$(\lambda x^{**})(\omega) = \lambda x^{**}(\omega).$$

Soit f l'application de E dans E^{**} telle que $f(x) = x^{**}$ avec $\forall \omega \in E^*, x^{**}(\omega) = \omega(x)$. L'application f est un isomorphisme :

f est linéaire : $\forall x, y \in E, \forall \omega \in E^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\alpha x + \beta y)^{**}(\omega) &= \omega(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha \omega(x) + \beta \omega(y) \\ &= \alpha x^{**}(\omega) + \beta y^{**}(\omega) \end{aligned}$$

f est bijective : On a $f(e_\mu) = e_\mu^{**}$ avec $\forall \omega \in E^*, e_\mu^{**}(\omega) = \omega(e_\mu)$. En particulier pour $\omega = e^{*\nu}$, i.e. $e_\mu^{**}(e^{*\nu}) = e^{*\nu}(e_\mu) = \delta^\nu_\mu$, donc $\{e_\mu^{**}\}$ est la base duale de $\{e^{*\mu}\}$.

²⁵Cette action est fréquemment notée $\langle \omega, x \rangle$. Ce produit est différent du produit scalaire, défini entre deux vecteurs.

On convient donc d'identifier les éléments de E^{**} à ceux de E , ce qui correspond pour ce qui est des notations à supprimer les ** .

7.1.4 Applications multilinéaires, tenseurs, champs de tenseurs

Une application f de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans \mathbb{R} est *multilinéaire* ssi elle est linéaire en chacune de ses variables. Nous allons nous intéresser à un cas particulier d'applications multilinéaires très importantes en physique : les tenseurs.

Un *tenseur* p fois *covariant* et q fois *contravariant*²⁶, on dit encore *de type* $\binom{p}{q}$ est une application multilinéaire de $(E^*)^p \times E^q$ dans \mathbb{R} . Le nombre $p + q$ est *l'ordre* du tenseur.

En particulier les tenseurs de type $\binom{0}{0}$, $\binom{0}{1}$ et $\binom{1}{0}$ s'identifient respectivement aux scalaires, aux formes linéaires et aux vecteurs. Le premier de ces tenseurs est d'ordre 0 alors que second et le troisième sont du premier ordre.

La notion de *champ de tenseurs* est définie de manière analogue à celle de champ de vecteurs : les composantes dépendent de la «position» dans l'espace considéré. Remarquons qu'un *champ scalaire* n'est autre qu'une fonction de la «position».

Les *composantes* de l'application multilinéaire f de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans \mathbb{R} , par rapport aux bases $\{e_{\mu_i}\}$, sont les nombres

$$f_{\mu_1 \dots \mu_n} = f(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_n}), \quad (51)$$

pour un tenseur T de type $\binom{p}{q}$ cette expression devient²⁷ :

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = T(e^{*\mu_1}, \dots, e^{*\mu_p}, e_{\nu_1}, \dots, e_{\nu_q}). \quad (52)$$

7.1.5 Opérations sur les tenseurs

Les opérations sur les tenseurs sont des cas particuliers d'opérations sur les applications

²⁶La raison de cette terminologie est donnée ci-après.

²⁷On veillera à respecter dans cette expression la position (décalée) des indices.

multilinéaires, nous nous restreindrons néanmoins au cas tensoriel afin d'alléger l'exposé.

- *Combinaisons linéaires* :

$\alpha T_1 + \beta T_2$, où T_1 et T_2 sont des tenseurs de même type $\binom{p}{q}$, α, β des scalaires, est un tenseur défini par :

$$\begin{aligned} (\alpha T_1 + \beta T_2)(\omega_1, \dots, \omega_p, x_1, \dots, x_q) = \\ \alpha T_1(\omega_1, \dots, \omega_p, x_1, \dots, x_q) + \\ \beta T_2(\omega_1, \dots, \omega_p, x_1, \dots, x_q), \end{aligned}$$

ses composantes sont :

$$\begin{aligned} (\alpha T_1 + \beta T_2)^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \\ \alpha T_1^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \beta T_2^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \end{aligned}$$

- *Produit tensoriel* :

Le tenseur $(T_1 \otimes T_2)$ noté également $T_1 T_2$, où T_1 et T_2 sont des tenseurs de type $\binom{p}{q}$ et $\binom{r}{s}$ respectivement, est un tenseur de type $\binom{p+r}{q+s}$ défini par :

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes T_2)(\omega_1, \dots, \omega_p, x_1, \dots, x_q, \\ \omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}, x_{q+1}, \dots, x_{q+s}) = \\ T_1(\omega_1, \dots, \omega_p, x_1, \dots, x_q) \\ T_2(\omega_{p+1}, \dots, \omega_{p+r}, x_{q+1}, \dots, x_{q+s}), \end{aligned}$$

ses composantes sont :

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes T_2)^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \mu_{p+1} \dots \mu_{p+r} \nu_{q+1} \dots \nu_{q+s} = \\ T_1^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} T_2^{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+r}}_{\nu_{q+1} \dots \nu_{q+s}} \end{aligned}$$

- *Contraction* :

A partir d'un tenseur de type $\binom{p}{q}$, $p \geq 1, q \geq 1$, il est possible de former des tenseurs d'ordres plus petits en sommant sur une ou plusieurs paires d'indices covariants/contravariants. Cette opération est appelée contraction. Par exemple :

- si T est un tenseur de type $\binom{3}{1}$ de composantes $T^{\mu\nu\delta}_\alpha$, on peut former par contraction trois tenseurs différents de composantes $T^{\mu\nu\delta}_\mu, T^{\mu\nu\delta}_\nu, T^{\mu\nu\delta}_\delta$.
- si T_1 et T_2 sont deux tenseurs de types $\binom{1}{2}$ et $\binom{3}{0}$ l'objet de composantes $T_3^{\mu\nu} = T_1^\mu_{\alpha\beta} T_2^{\alpha\nu\beta}$ est un tenseur de type $\binom{2}{0}$.

7.1.6 Espaces de tenseurs

Considérons l'ensemble des tenseurs de type $\binom{p}{q}$ fixé, c'est un ensemble d'applications multilinéaires. D'après le paragraphe précédent il est naturellement muni, via la définition des combinaisons linéaires de tenseurs, d'une structure d'espace vectoriel. Cet espace est appelé le *produit tensoriel* des p espaces E^* et q espaces E , ses éléments sont les tenseurs de type $\binom{p}{q}$. Il est noté : $\otimes_p E^* \otimes_q E$.

On peut montrer qu'une base de cet espace est donnée par l'ensemble des produits tensoriels $\{e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q}\}$. Un tenseur T de type $\binom{p}{q}$ se développe sur cette base suivant :

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q}. \quad (53)$$

Ex. 7.1 : On veut montrer que l'ensemble \mathcal{B} des produits tensoriels $\{e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q}\}$ constitue bien une base de $\otimes_p E^* \otimes_q E$.

1. Montrer que l'on a :

$$(e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q})^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \delta_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots \delta_{\mu_p}^{\alpha_p} \delta_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\beta_q}^{\nu_q}.$$

2. En utilisant la définition des composantes d'un tenseur en déduire que T se développe bien sur \mathcal{B} , i.e. que \mathcal{B} engendre l'espace des tenseurs de type $\binom{p}{q}$.
3. Montrer, que \mathcal{B} est une famille libre.

7.1.7 Changement de base, critère de tensorialité

Considérons le passage d'une base $\{e_\mu\}$ à une base $\{e_{\mu'}\}$ ²⁸. On a :

$$e_{\mu'} = A_{\mu'}^\nu e_\nu, \quad (54)$$

²⁸Nous adoptons ici la convention de distinguer la «nouvelle» base par des indices primés.

où $A_{\mu'}^{\nu}$ désignent les éléments de la matrice de passage²⁹. Les éléments de la matrice inverse A^{-1} sont notés $A_{\mu}^{\nu'}$, on a donc $AA^{-1} = A_{\alpha'}^{\nu} A_{\mu}^{\alpha'} = \delta^{\nu}_{\mu}$ et $A^{-1}A = A_{\alpha}^{\nu'} A_{\mu'}^{\alpha} = \delta^{\nu'}_{\mu'}$. Le passage de la nouvelle base à l'ancienne est donc :

$$e_{\mu} = A_{\mu}^{\nu'} e_{\nu'}. \quad (55)$$

Le changement de base duale s'écrit :

$$e^{*\mu'} = A_{\nu'}^{\mu'} e^{*\nu} \quad (56)$$

$$e^{*\mu} = A_{\nu'}^{\mu} e^{*\nu'}. \quad (57)$$

Les composantes d'un vecteur x et d'une forme linéaire ω se transformeront respectivement comme :

$$x^{\mu'} = A_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}, \quad (58)$$

$$\omega_{\mu'} = A_{\mu'}^{\nu} \omega_{\nu}. \quad (59)$$

Ex. 7.2 : Retrouver les expressions (56 à 59).

On constate que les composantes des formes ont le même comportement sous un changement de base que les vecteurs de base eux-mêmes, elles sont pour cette raison dites *covariantes*. Les composantes des vecteurs, à l'opposé, sont dites *contravariantes*.

Pour un tenseur de type $\binom{p}{q}$ le changement de base s'écrit d'après (52) :

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_p}_{\nu'_1 \dots \nu'_q} = A_{\mu_1}^{\mu'_1} \dots A_{\mu_p}^{\mu'_p} A_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots A_{\nu'_q}^{\nu_q} T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}. \quad (60)$$

On peut montrer³⁰, que réciproquement :

- Les quantités $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ attachées aux bases $\{e_{\mu_i}\}$ de $(E^*)^p \times E^q$, sont les composantes d'un tenseur déterminé si elles se transforment sous un changement de base quelconque suivant (60).

²⁹Ce ne sont pas les composantes d'un tenseur puisqu'ils réfèrent à deux bases différentes du même espace.

³⁰Ce théorème est très souvent utilisé comme définition d'un tenseur.

7.1.8 Tenseurs constants

Les tenseurs constants sont tels que leurs composantes ont la même valeur dans toutes les bases. Citons quelques exemples importants :

- Le tenseur nul.
- Le tenseur de Kronecker δ dont les composantes valent 1 si les deux indices sont égaux et 0 sinon.
- Le tenseur métrique η d'un espace minkowskien (*cf.* ci après).

Ex. 7.3 : Vérifier explicitement, dans l'espace de Minkowski à 2 dimensions, que $\eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu}$ numériquement. La matrice de changement de base est ici la transformation de Lorentz Λ .

7.1.9 Tenseur métrique, espaces euclidiens et minkowskiens

Le tenseur métrique g , appelé plus communément «métrique», est un tenseur de type $\binom{0}{2}$ symétrique. Ses composantes sont donc $g_{\mu\nu}$. Si $\det(g) \neq 0$, il est dit *non-dégénéré* et définit dans ce cas sur l'espace E un produit scalaire. Lorsque g n'est pas défini positif on emploie souvent le terme de pseudo-produit scalaire.

La définition d'un produit scalaire entraîne celle de l'orthogonalité : deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul. Remarquons que les vecteurs x tels que $g(x, x) = 0$, sont, par définition, orthogonaux à eux-mêmes.

Un espace est euclidien (resp. minkowskien) si sa métrique peut s'écrire³¹ $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ (resp. $g_{\mu 0} = \delta_{\mu 0}$, $g_{ij} = -\delta_{ij}$) en tout point de l'espace. On note le tenseur métrique minkowskien η , la notation g étant réservée au cas plus général où les composantes peuvent dépendre de la position, ce qui se produit dans un système de coordonnées curvilignes ou sur un espace courbe (*cf.* 7.2).

³¹A la convention de signe près. L'espace est euclidien (resp. minkowskien) également pour $g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}$ (resp. $g_{\mu 0} = -\delta_{\mu 0}$, $g_{ij} = +\delta_{ij}$).

7.1.10 Covecteurs, règles d'abaissement et de relèvement d'indices

Le tenseur g permet d'établir une bijection entre les vecteurs et les formes linéaires : à chaque vecteur de composantes x^μ (indice en haut), on associe la forme linéaire de composantes $x_\mu := g_{\mu\nu}x^\nu$ (indice en bas). La notation x désigne à la fois le vecteur et la forme correspondante, souvent appelée dans ce contexte *covecteur*.

- En détails on procède comme suit : à chaque vecteur x on associe la forme linéaire $\omega_x := g(x, \cdot)$ de composantes $\omega_{x\mu} = g_{\mu\nu}x^\nu$ de telle sorte que pour un vecteur y quelconque de E on ait $\omega_x(y) = g(x, y)$. Avec ces notations, on définit également l'application bilinéaire symétrique g^{-1} de $E^* \times E^*$ dans \mathbb{R} par $g^{-1}(\omega_x, \omega_y) = g(x, y)$, ses composantes sont notées $g^{\mu\nu}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} g^{-1}(\omega_x, \omega_y) &= \omega_{x\mu}\omega_{y\nu}g^{\mu\nu} \\ &= \omega_x(e_\mu)\omega_y(e_\nu)g^{\mu\nu} \\ &= g(x, e_\mu)g(y, e_\nu)g^{\mu\nu} \\ &= x^\alpha y^\beta g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} g^{-1}(\omega_x, \omega_y) &= g(x, y) \\ &= x^\alpha y^\beta g_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

d'où par comparaison :

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu{}_\nu. \quad (61)$$

Si l'on considère $g_{\mu\nu}$ comme les éléments d'une matrice $g^{\mu\nu}$ sont donc les éléments de la matrice inverse.

Considérons à présent une forme linéaire ω quelconque de E^* , x le vecteur de E de composantes $x^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu$ et y un vecteur quelconque de E on a successivement :

$$\begin{aligned} \omega(y) &= \omega_\mu y^\mu \\ &= \delta^\alpha{}_\mu \omega_\alpha y^\mu \\ &= g^{\alpha\beta}g_{\beta\mu} \omega_\alpha y^\mu \\ &= g(x, y), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\omega = \omega_x$. Ce qui montre qu'à toute forme linéaire est associé un vecteur. On convient alors de définir les *composantes covariantes* d'un vecteur x par :

$$x_\mu := g_{\mu\nu}x^\nu, \quad (62)$$

ces composantes sont, comme nous venons de le voir, celle de la forme linéaire ω_x . Les formes linéaires sont dans ce contexte appelées *covecteurs* et sont dénotées par les mêmes symboles que les vecteurs³², *i.e.* x désignera le vecteur de composantes x^μ et la forme de composantes x_μ . On aura de manière analogue à (62) :

$$x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu, \quad (63)$$

Le lien entre vecteur et forme linéaire se généralise aux tenseurs. Ainsi, sur le plan du calcul, la définition (62) et son analogue (63), peuvent être considérées comme des règles de *relèvement* et *d'abaissement* d'indices. Pour abaisser (resp. relever) l'indice α d'un tenseur de composantes $T \dots^\alpha \dots$ (resp. $T \dots_\alpha \dots$) on écrira :

$$T \dots_\alpha \dots = g_{\alpha\beta} T \dots^\beta \dots \quad (64)$$

$$T \dots^\alpha \dots = g^{\alpha\beta} T \dots_\beta \dots \quad (65)$$

On récriera en particulier (61) comme : $g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = g^\mu{}_\nu$. On a donc *numériquement* $g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$, bien que $g_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$ en général.

7.1.11 Bases et systèmes de coordonnées

Le choix d'un système de coordonnées est fonction du problème que l'on étudie. Dans un système de coordonnées *cartésiennes* orthogonales³³ les repères sont des systèmes d'axes portés par des vecteurs de base orthonormés d'orientation constante.

On peut envisager, des bases et changements de bases plus généraux. Il suffit par exemple de considérer, au lieu de coordonnées cartésiennes, des coordonnées curvilignes, $\{e_\mu\}$ désignera alors un ensemble de quatre vecteurs linéairement indépendants tangents aux lignes de coordonnées. On appelle une telle base *base coordonnée*. Le passage d'une base $\{e_\mu\}$ à une base *voisine* $\{e'_\mu\}$ s'effectuera toujours à l'aide des

³²Ces notions sont tout à fait analogues à celles de *bra* et de *ket* rencontrées en physique quantique.

³³Au sens de la métrique g de l'espace.

expressions (54), mais ce changement sera *infinitésimal*, la matrice de transformation étant la matrice jacobienne de la transformation faisant passer des coordonnées x aux coordonnées x' . En effet, un «vecteur infinitésimal³⁴» de composantes dx^μ dans $\{e_\mu\}$ aura pour composantes dans la base voisine $\{e'_\mu\}$: $dx^{\mu'} = \partial_\mu x^{\mu'} dx^\mu$. On a donc pour la matrice de changement de base :

$$J_{\mu'}^{\mu} = \partial_\mu x^{\mu'}. \quad (66)$$

Son inverse³⁵

$$J_{\mu'}^{\mu} = \partial_{\mu'} x^\mu, \quad (67)$$

relie les bases suivant (54), *i.e.* $e_{\mu'} = J_{\mu'}^{\mu} e_\mu$.

Remarquons que dans le cas où J est un changement de référentiel inertiel dans l'espace de Minkowski, l'expression (67) est une transformation de Lorentz.

Ex. 7.4 : Montrer que l'on a bien :

$$g_{\mu'\nu'} = J_{\mu'}^{\mu} J_{\nu'}^{\nu} g_{\mu\nu} \quad (68)$$

Rien n'oblige à ce que les vecteurs de base soient reliés aux coordonnées que l'on utilise. En fait, un ensemble de n vecteurs $\{\epsilon_A\}$ de l'espace E pour constituer une base doit simplement permettre la décomposition unique de n'importe quel vecteur x de l'espace : $x = x^A \epsilon_A$, x^A étant les composantes de x dans la base $\{\epsilon_A\}$. Ce type de base est dit *non-coordonnée*. Dans un cadre relativiste ce sont les bases pseudo-orthogonales qui sont utilisées³⁶, elles vérifient :

$$g(\epsilon_A, \epsilon_B) = \eta_{AB} = g_{\mu\nu} \epsilon_A^\mu \epsilon_B^\nu. \quad (69)$$

Dans cette expression ϵ_A^μ désigne la composante μ du vecteur ϵ_A rapportée à la base cartésienne orthogonale usuelle $\{e_\mu\}$.

³⁴Nous verrons au paragraphe 7.2.3 qu'il s'agit en fait de formes.

³⁵Nous supposons que la transformation n'est pas singulière.

³⁶Dans un espace à quatre dimensions on désigne ces bases générales sous le nom de tétrades, ou «vierbeins».

Si l'on se place dans $E_{1,3}$ une telle base $\{\epsilon_A\}$ comprendra un vecteur de genre temps et trois vecteurs de genre espace³⁷.

7.1.12 Dérivation dans les espaces euclidiens et minkowskien

La relation $\partial_{\mu'} = (\partial_{\mu'} x^\mu) \partial_\mu$ peut s'interpréter à l'aide de (67) comme un changement de base infinitésimal, on en déduit que ∂_μ se comporte comme un covecteur. Le vecteur correspondant sera donné par³⁸ : $\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu$.

On va donc pouvoir former de nouveaux tenseurs par dérivation : à partir du tenseur de composantes $T^\mu{}_\nu{}^\sigma$, *i.e.* de type $\binom{2}{1}$, on pourra former, par exemple les tenseurs $\partial_\alpha T^\mu{}_\nu{}^\sigma$, de type $\binom{2}{2}$, et $\partial_\sigma T^\mu{}_\nu{}^\sigma$ de type $\binom{1}{1}$. Notons que la dérivation est fréquemment notée par une virgule ainsi $\partial_\sigma T^\mu{}_\nu{}^\sigma$ peut s'écrire $T^\mu{}_\nu{}^\sigma{}_{,\sigma}$.

Soulignons que le caractère tensoriel des expressions où intervient ∂ disparaît en coordonnées curvilignes et en relativité générale.

7.2 Les espaces courbes

7.2.1 Variétés différentiables

Un exemple d'espace courbe est fourni par la sphère. Pour la décrire une méthode consiste à la cartographier : une région suffisamment petite étant assimilable à une région du plan on représente la surface sur un ensemble de domaines plans : les cartes. Pour que cette représentation soit fidèle plusieurs conditions sont nécessaires :

1. L'ensemble de toutes les cartes, l'atlas, doit couvrir toute la surface.
2. Deux points voisins sur la sphère doivent être voisins sur la carte où ils sont représentés.

³⁷Les vecteurs de genre lumière, qui sont orthogonaux à eux même, ne peuvent être présent dans une base.

³⁸On a donc $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

3. On doit pouvoir passer continûment d'une carte à une carte voisine et si deux cartes se recouvrent partiellement, leurs indications doivent coïncider.

La notion de *variété différentiable* est la traduction formelle de cette construction. Nous la donnons ici afin de fixer la terminologie. On dira que M est une variété différentiable à n dimensions si :

1. M est un espace topologique.
2. M est munie d'une famille de couples $\{(U_i, \varphi_i)\}$ où, $\{U_i\}$ est une famille d'ouverts recouvrant M , φ_i est un homéomorphisme³⁹ de U_i vers un ouvert de \mathbb{R}^n .
3. Si U_i et U_j sont tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ dans $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est indéfiniment différentiable.

Dans cette définition le premier point est une structure minimum nécessaire pour définir la notion de points voisins. Le second point formalise les notions de *cartes* : le couple (U_i, φ_i) , et d'*atlas* : la famille $\{(U_i, \varphi_i)\}$; φ_i est l'*application coordonnée* elle fait correspondre à un point P de U_i un point (un vecteur) de \mathbb{R}^n de coordonnées notées $\{x_{(i)}^\mu\}$ ou plus simplement⁴⁰ $x(P) = \{x^\mu\}$. Le dernier point assure que la condition 3. de l'exemple précédent est satisfaite.

Une variété⁴¹ est donc, d'après le point 2, un espace «localement comme \mathbb{R}^n ».

7.2.2 Espace tangent, espace cotangent

A ce stade, aucune des notions permettant la construction des tenseurs n'est présente sur M , nous ne disposons même pas d'espace vectoriel !

³⁹Application continue possédant une application réciproque continue.

⁴⁰Pour ne pas alourdir les notations nous confondrons φ_i et $x_{(i)}$, de plus comme nous n'aurons pas dans la pratique à utiliser explicitement des familles de cartes nous supprimerons l'indice (i) .

⁴¹Le terme différentiable sera toujours sous-entendu.

Pour construire des vecteurs sur M , nous allons généraliser la notion de vecteur tangent.

Considérons une courbe sur M ⁴², paramétrée par λ , il lui correspond des coordonnées $x^\mu(\lambda)$ (dans plusieurs cartes si besoin). Plaçons nous au voisinage d'un point P et considérons un élément f de $\mathcal{F}(M)$, l'ensemble des fonctions de M dans \mathbb{R} . La dérivée de f au point P le long de la courbe paramétrée par λ est :

$$\left(\frac{df}{d\lambda}\right)_P = \frac{\partial f(x(\lambda))}{\partial x^\mu} \left(\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}\right)_P. \quad (70)$$

Dans cette expression $\left(\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}\right)_P$ est porté par la tangente en P , on peut le voir comme un vecteur vitesse. La relation (70) peut se récrire $V^\mu \partial_\mu f$, avec

$$V^\mu := \left(\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}\right)_P. \quad (71)$$

Comme f est quelconque, on *définit*⁴³ le vecteur tangent V au point P par :

$$V := \left(\frac{d}{d\lambda}\right)_P = V^\mu \partial_\mu. \quad (72)$$

Ainsi, en géométrie différentielle, les vecteurs sont des opérateurs agissant sur des fonctions de M dans \mathbb{R} .

L'ensemble des vecteurs tangents au point P forme un espace vectoriel⁴⁴, appelé *espace tangent* et noté $T_P M$ (fig. 4).

Le dual de l'espace $T_P M$, noté $T_P^* M$ est appelé *espace cotangent*. Ses éléments, les applications linéaires agissant sur $T_P M$, sont appelées *1-formes*.

Nous disposons, à présent d'un espace vectoriel et de son dual. Il nous reste à préciser, les bases $\{e_\mu\}$ et $\{e^{*\mu}\}$ de $T_P M$ et $T_P^* M$ ainsi que les matrices de changement de bases.

⁴²Plus rigoureusement, M est une sous-variété de \mathbb{R}^n .

⁴³On identifie en fait toutes les courbes donnant le même vecteur tangent au point P .

⁴⁴Cela découle directement des propriétés linéaires de la dérivée.

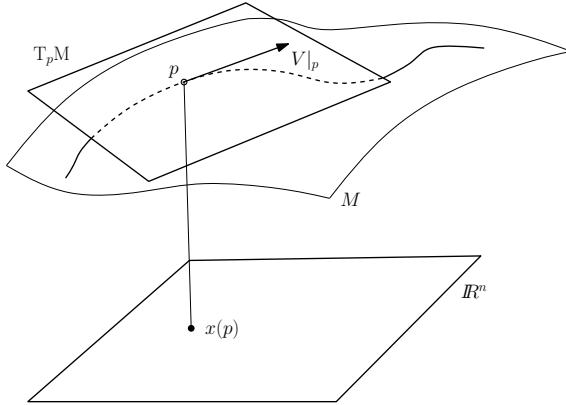


FIG. 4 – Vecteur et plan tangent au point p .

7.2.3 Bases et changement de base

La définition (72) montre directement que $\{\partial_\mu\}$ apparaît comme la base attachée aux coordonnées locales x^μ . On aura donc :

$$e_\mu = \partial_\mu \quad (73)$$

Une 1-forme particulière, la «1-forme gradient» df va nous permettre d'identifier la base duale de T_p^*M . Elle est définie par :

$$\forall V \in T_p M, \forall f \in \mathcal{F}(M), df(V) := V(f). \quad (74)$$

En appliquant cette définition à $f = x^\mu$ et $V = e_\nu$ on a :

$$dx^\nu(e_\mu) = \partial_\mu x^\nu = \delta^\nu_\mu. \quad (75)$$

$\{dx^\mu\}$ est donc la base duale de $\{\partial_\mu\}$. On a⁴⁵ :

$$e^{*\mu} = dx^\mu. \quad (76)$$

Une 1-forme ω de T_p^*M se décompose donc comme :

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (77)$$

ω_μ désignant les composantes de ω relativement à la base $\{dx^\mu\}$.

⁴⁵On remarquera qu'ici dx^μ n'est pas la ν -ième composante du vecteur dx .

Ex. 7.5 : Vérifier que :

1. le développement de df sur la base $\{e^{*\mu}\}$ redonne l'expression habituelle de la différentielle de f .
2. l'action $\omega(V)$ d'une 1-forme ω de T_p^*M sur un vecteur V de $T_p M$ est donnée par :

$$\omega(V) = \omega_\mu V^\mu. \quad (78)$$

Déterminons, à présent, les matrices de passage d'une base à une autre pour $T_p M$ et $T_p^* M$. Un changement de base correspond à un changement de coordonnées, c'est-à-dire au passage du système $\{x^\mu\}$ d'une carte à celui $\{x^{\mu'}\}$ d'une autre. Un vecteur V de $T_p M$ est indépendant du système de coordonnées. On a donc, pour un un élément f quelconque de $\mathcal{F}(M)$, $V^\mu(\partial_\mu f) = V^{\mu'}(\partial_{\mu'} f)$, en choisissant pour f la fonction $x^{\nu'}$ on obtient :

$$V^{\mu'} = \partial_\mu x^{\mu'} V^\mu \quad (79)$$

Ex. 7.6 :

1. Montrer en considérant l'effet d'un changement de coordonnées sur la 1-forme df d'un élément f quelconque de $\mathcal{F}(M)$ que l'on a :

$$e_{\mu'} = \partial_{\mu'} x^\mu e_\mu. \quad (80)$$

2. Retrouver ce résultat en considérant l'effet d'un changement de variables sur la différentielle d'une fonction f à valeur dans \mathbb{R} .

Les matrices de changement de bases sont donc données par les expressions (66, 67).

Les bases précédentes sont des bases coordonnées (cf. 7.1.11). On peut montrer⁴⁶ qu'elles sont caractérisées par la relation :

$$[e_\mu, e_\nu] = 0,$$

où le commutateur de deux vecteurs U et V est défini par :

$$\forall f \in \mathcal{F}(M), [U, V](f) := U(V(f)) - V(U(f)). \quad (81)$$

⁴⁶Voir par exemple [12].

7.2.4 Champs de vecteurs et de tenseurs sur M

Les vecteurs, et plus généralement les tenseurs, utilisés en physique sont, en fait, le plus souvent des champs sur M : ils sont fonction de la position, cette dépendance n'est pas explicite et c'est le contexte qui précise la nature de l'objet. On dira que V est un champ de vecteurs sur M si chacune de ses composantes est une fonction⁴⁷ de M dans \mathbb{R} . L'ensemble des champs de vecteurs sur M sera noté $\mathcal{H}(M)$. Les champs de tenseurs sont définis de manière analogue, l'ensemble des champs de tenseurs de type $\binom{p}{q}$ est dénoté $\mathcal{T}_q^p(M)$.

Remarquons que contrairement au vecteur qui appartient à l'espace tangent en un point P . Le champ de vecteur est défini en chaque point de M . L'espace des champs de vecteur est donc constitué de l'ensemble des espaces tangents, il est donc très différent de $T_P M$. Nous n'aurons pas besoin ici d'étudier cet espace⁴⁸. Notons, pour fixer la terminologie, qu'il s'agit d'un cas particulier d'espace *fibré* appelé naturellement le *fibré tangent* et que l'on note TM . La même remarque s'applique aux autres champs, en particulier les champs de 1-formes appartiennent à un espace regroupant tous les espaces cotangents $T_P^* M$, noté TM^* , qui possède une structure analogue à TM et s'appelle le *fibré cotangent*.

Donnons nous, à présent, un champ de vecteur V . Une courbe $x(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dont le vecteur tangent en $x(\lambda)$ fixé est $V(x(\lambda))$, c'est-à-dire telle que :

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = V^\mu(x(\lambda)),$$

est appelée *courbe intégrale* de V , car elle est solution de l'équation différentielle précédente. Nous dirons qu'une telle courbe est *engendrée* par le vecteur V . Comme V est un champ de

vecteur il engendre un ensemble de courbes qui constitue ce que l'on appelle le *flot*⁴⁹ de V .

Ex. 7.7 : Déterminer le flot des vecteurs :

1. $V = -y\partial_x + x\partial_y$,
2. $V = +y\partial_x + x\partial_y$.

7.2.5 Transport parallèle, dérivée covariante et connexion affine

Au paragraphe 7.1.12 nous avons montré que l'opérateur ∂_μ se comporte comme un vecteur dans $E_{1,3}$ (en coordonnées cartésiennes orthogonales) et qu'en conséquence la dérivée d'un tenseur est un tenseur. Cette propriété n'est plus vraie pour une variété quelconque.

La difficulté peut être vue de la façon suivante : la dérivée en un point, par exemple d'un vecteur par rapport à une coordonnée x^ν , est définie par :

$$\partial_\nu V^\mu = \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)}{\Delta x^\nu}, \quad (82)$$

pour chaque composante de V . Cette expression fait intervenir *a priori* deux points différents l'un P de coordonnées $\{\dots, x^\nu, \dots\}$, notées $\{x\}$, l'autre P' de coordonnées $\{\dots, x^\nu + \Delta x^\nu, \dots\}$, notées $\{x + \Delta x\}$.

Dans un espace euclidien ou pseudo-euclidien comme $E_{1,3}$ en coordonnées cartésiennes orthogonales, cela ne pose pas de difficulté puisque le vecteur au point P peut être transporté *sans changement* en P' . Le problème apparaît pour des coordonnées curvilignes, les vecteurs de la base⁵⁰ $\{\tilde{e}_\mu\}$ changeant avec les coordonnées. On peut le voir sur l'expression suivante où ∂V désigne symboliquement le «gradient» de V , on a : $\partial V = \partial(V^\mu \tilde{e}_\mu) = (\partial V^\mu) \tilde{e}_\mu + V^\mu \partial(\tilde{e}_\mu)$. Le second terme du membre de droite prend en compte la variation des vecteurs de base. Sur

⁴⁹Cette terminologie est empruntée à l'hydrodynamique les courbes engendrées par V étant dans ce cas les lignes de courant suivies par les particules fluides.

⁵⁰Nous notons ses vecteurs avec un $\tilde{}$ pour la distinguer de la base des coordonnées cartésiennes.

⁴⁷Supposée infiniment différentiable.

⁴⁸On pourra consulter [12] pour une introduction.

une variété M quelconque cette variation provient du déplacement dans l'espace lui même et non plus d'un choix de coordonnées. Une généralisation de (82) doit permettre de comparer des vecteurs situés en des points différents et donc appartenant à des espaces tangents différents.

La solution à ce problème consiste à trouver un moyen pour effectuer un *transport parallèle* des vecteurs, et plus généralement des tenseurs, d'un point à un autre. Ce moyen est fourni par la définition d'une *connexion affine* qui permet, à son tour, la définition d'une *dérivée covariante*. Pour motiver la définition formelle de la connexion affine et de la dérivée covariante, nous allons tout d'abord chercher à construire cette dernière de façon heuristique.

Considérons un vecteur V , nous souhaitons comparer $V(x)$ à $V(x + \Delta x)$ au même point de coordonnées $\{x + \Delta x\}$. Pour cela nous transportons $V(x)$ sans changement en $x + \Delta x$, le vecteur transporté est noté $\tilde{V}(x + \Delta x)$. La quantité Δx étant infinitésimale on peut se convaincre⁵¹ que le vecteur transporté est donné par :

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) = V^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\alpha}(x)V^\alpha(x)\Delta x^\nu, \quad (83)$$

où le coefficient, pour l'instant indéterminé, Γ est appelé *coefficient de connexion*. Nous pouvons alors donner un sens à l'expression :

$$\nabla_\nu V^\mu := \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu}, \quad (84)$$

$\mu^{\text{ème}}$ composante de la dérivée covariante⁵² par rapport⁵³ à x^ν de V en x . Cette expression peut

⁵¹Cette expression assure que la somme et le produit par un scalaire de vecteurs transportés soit égale au transporté de la somme et du produit.

⁵²A ne pas confondre avec la dérivée covariante de la $\mu^{\text{ème}}$ composante de V que nous noterons : $\nabla_\nu(V^\mu)$. Une notation moins ambiguë serait $(\nabla_\nu V)^\mu$. Nous nous conformerons cependant le plus souvent à l'usage.

⁵³Ce point sera précisé plus loin.

se récrire :

$$\begin{aligned} \nabla_\nu V^\mu &= \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x)}{\Delta x^\nu} \\ &+ \lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu}, \end{aligned}$$

ce qui, avec (83), devient :

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} V^\alpha. \quad (85)$$

Les symboles de connexion traduisent donc la «correction» à la dérivée due au transport, c'est-à-dire au changement de vecteurs de base.

Donnons, à présent, une définition formelle d'une *connexion affine* : c'est une application ∇ de $\mathcal{H}(M) \times \mathcal{H}(M)$ dans $\mathcal{H}(M)$ qui à deux vecteurs V et U associe le vecteur $\nabla_V U$ tel que :

$$\nabla_V(U + W) = \nabla_V U + \nabla_V W, \quad (86)$$

$$\nabla_{V+W} U = \nabla_V U + \nabla_W U, \quad (87)$$

$$\nabla_V(fU) = V(f)U + f\nabla_V U, \quad (88)$$

$$\nabla_{fV} U = f\nabla_V U, \quad (89)$$

avec $W \in \mathcal{H}(M)$ et $f \in \mathcal{F}(M)$.

Montrons que la définition de la connexion redonne l'expression (85) de la dérivée covariante d'un vecteur. Avec (89) puis (88) on a :

$$\begin{aligned} \nabla_V U &= V^\mu \nabla_{e_\mu}(U^\nu e_\nu) \\ &= V^\mu (e_\mu(U^\nu)e_\nu + U^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu), \end{aligned}$$

où $\nabla_{e_\mu} e_\nu$ est par définition un vecteur, il se développe donc sur la base $\{e_\mu\}$:

$$\nabla_\mu e_\nu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e_\alpha, \quad (90)$$

où l'on a posé, $\nabla_\mu := \nabla_{e_\mu}$. Cette relation *défini* les *symboles de connexion* Γ . En portant (90) dans l'expression de $\nabla_V U$ et en tenant compte de $e_\mu = \partial_\mu$ il vient :

$$V^\mu \nabla_\mu U = V^\mu (\partial_\mu U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu) e_\alpha. \quad (91)$$

On a donc,

$$\nabla_\mu U^\alpha = \partial_\mu U^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} U^\nu,$$

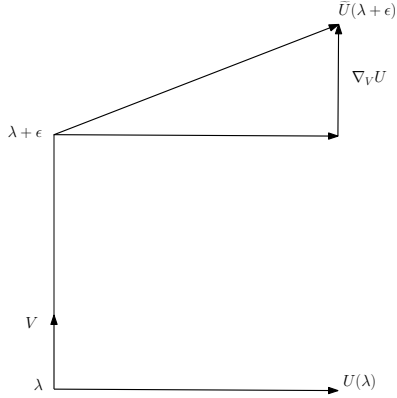


FIG. 5 – Transport du vecteur U le long de la courbe engendrée par V .

qui est précisément l'équation (85). Les symboles de connexion, qui apparaissent dans (90) comme les coefficients du développement de $\nabla_\mu e_\nu$ dans la base $\{e_\mu\}$, prennent en compte la «déformation» de la base lors du transport comme annoncé au paragraphe précédent. On peut donc interpréter géométriquement le vecteur $\nabla_V U$ comme une mesure de la «différence de parallélisme» entre U et son transporté (Fig. 5). Un vecteur U sera transporté parallèlement le long d'une courbe engendrée par un vecteur V s'il vérifie :

$$\nabla_V U = 0. \quad (92)$$

En fait, c'est plus précisément la connexion, dont découle l'expression de $\nabla_V U$, qui *définit* une notion de parallélisme sur la variété.

Il est important de remarquer que comme (91) n'est autre que la décomposition du vecteur $\nabla_V U$ sur la base $\{e_\mu\}$, et que la composante $V^\mu(\partial_\mu U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\nu)$ est la contraction du vecteur V et de la dérivée covariante de U , cette dernière est nécessairement un tenseur.

Ex. 7.8 :

1. Montrer, à l'aide de (90) et en se rappelant que $J_{\nu'}^{\mu'} := \partial_\nu x^{\mu'}$ n'est pas un tenseur que les symboles de connexion se transforment

suivant :

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\delta'} = J_\nu^{\delta'} J_{\nu'}^\alpha J_\mu^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + J_\nu^{\delta'} (\partial_{\mu'} J_{\nu'}^\nu). \quad (93)$$

2. En déduire la loi de transformation de la différence de deux symboles de connexion, *i.e.* calculer :

$$\Gamma_{\mu'\nu'}^{\delta'} - \tilde{\Gamma}_{\mu'\nu'}^{\delta'}.$$

Les symboles de connexion ne sont donc *pas des tenseurs*, mais la différence de deux symboles (pour des connexions différentes) est un tenseur.

Pour généraliser la notion de dérivée covariante à un tenseur d'ordre quelconque partons de la décomposition (53) :

$$T = T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q}.$$

Le tenseur T est exprimé par des vecteurs, des 1-formes et des fonctions (les composantes). Il faut donc généraliser l'action de ∇_V aux fonctions et aux formes. Pour ce faire on pose :

$$\nabla_V f = V(f), \quad (94)$$

$$\nabla_V (T_1 \otimes T_2) = (\nabla_V T_1) \otimes T_2 + (\nabla_V T_2) \otimes T_1, \quad (95)$$

où f est une fonction et T_1, T_2 des tenseurs de types quelconques. La première de ces relations exprime que $\nabla_V f$ coïncide avec la dérivée de f suivant le vecteur V . La seconde, qui reste valable en présence de contractions, impose la règle de Leibnitz (dérivation d'un produit) à la connexion pour des tenseurs de types quelconques, c'est une généralisation de (88).

Ex. 7.9 :

1. Montrer que pour une 1-forme ω on a :

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \omega_\alpha. \quad (96)$$

2. En déduire la relation :

$$\nabla_\mu dx^\nu = -\Gamma_{\mu\alpha}^\nu dx^\alpha. \quad (97)$$

On peut à présent calculer $\nabla_V T$ à partir de la décomposition de T :

$$\nabla_V T = \nabla_V (T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q}).$$

En utilisant (95) on a :

$$\begin{aligned} \nabla_V T &= (\nabla_V T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q} \\ &+ T^{\mu_1 \dots \mu_p} (\nabla_V e_{\mu_1}) \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q} \\ &\vdots \\ &+ T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes (\nabla_V e^{*\nu_1}) \otimes \dots \otimes e^{*\nu_q} \\ &\vdots \\ &+ T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes (\nabla_V e^{*\nu_q}). \end{aligned}$$

En choisissant $V = e_\mu$ et en utilisant les relations (94, 90, 97), on obtient les composantes de la dérivée covariante du champ de tenseur T de type $\binom{p}{q}$:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\nu_1 \dots \nu_q} &= \partial_\mu T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\nu_1 \dots \nu_q} + \\ &\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu_1} T^{\alpha \dots \mu_p} e_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu_p} T^{\mu_1 \dots \alpha} e_{\nu_1 \dots \nu_q} - \\ &\Gamma_{\mu\nu_1}^\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\alpha \dots \nu_q} - \dots - \Gamma_{\mu\nu_q}^\alpha T^{\mu_1 \dots \mu_p} e_{\nu_1 \dots \alpha}. \end{aligned} \quad (98)$$

Dans la pratique les calculs s'effectuant souvent sur les composantes on utilisera les propriétés (94, 95) sous la forme :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu f &= \partial_\mu f, \quad (99) \\ \nabla_\mu T_1 \dots T_2 \dots &= T_1 \dots \nabla_\mu T_2 \dots + \\ &+ (\nabla_\mu T_1 \dots) T_2 \dots. \end{aligned} \quad (100)$$

Par ailleurs, la dérivée covariante est souvent notée par un point-virgule. On aura :

$$T^{\dots} \dots ;_\mu := \nabla_\mu T^{\dots} \dots,$$

et par convention :

$$T^{\dots} \dots ;_{\mu\nu} = \nabla_\nu (\nabla_\mu T^{\dots} \dots),$$

où l'ordre des indices respecte celui des dérivations.

7.2.6 Géodésiques

Une courbe $x^\mu(\lambda)$ sur M est une géodésique si son vecteur tangent V se transporte parallèlement à lui même le long de cette courbe, on a l'équation⁵⁴ :

$$\nabla_V V = 0. \quad (101)$$

Cette équation s'écrit en composantes :

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (102)$$

Dans ce contexte, une géodésique est interprétée comme le chemin le «plus droit» possible sur M .

7.2.7 Courbure et torsion

Jusqu'à présent il n'a pas été question de courbure. Cependant le transport parallèle, nécessaire pour compenser ses effets, doit en tenir compte de manière implicite. Examinons l'évolution d'un vecteur U transporté parallèlement de A en D le long d'un circuit fermé $(ABDC)$ infinitésimal par deux chemins distincts (ABD) et (ACD) (Fig. 6). Les coordonnées de A, B, C et D sont $\{x^\mu\}$, $\{x^\mu + \epsilon^\mu\}$, $\{x^\mu + \delta^\mu\}$ et $\{x^\mu + \epsilon^\mu + \delta^\mu\}$ respectivement.

Le vecteur $\tilde{U}(x^\kappa + \epsilon^\kappa)$, transporté du vecteur $U(x^\kappa)$ en B , s'écrit d'après (83) :

$$\tilde{U}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa) \simeq U^\nu(x^\kappa) - \epsilon^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu(x^\kappa) U^\alpha(x^\kappa).$$

⁵⁴On pourrait exiger une condition moins forte : $\nabla_V V = fV$, où $f \in \mathcal{F}(M)$. On peut montrer qu'il est toujours possible de reparamétriser la courbe pour retrouver l'équation (101). En relativité ce paramétrage correspond au temps propre pour une particule massive.

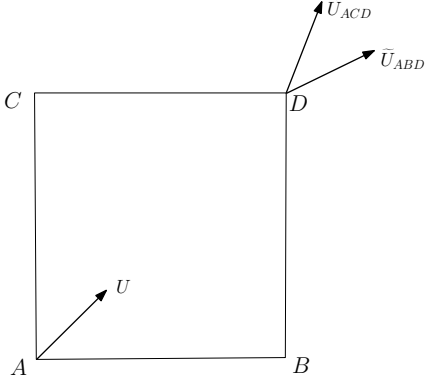


FIG. 6 – Transport du vecteur U le long deux chemins distincts.

Ce vecteur transporté en D devient :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa + \delta^\kappa) &\simeq \\ \tilde{U}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa) - \delta^\mu \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa + \epsilon^\kappa) \tilde{U}^\alpha(x^\kappa + \epsilon^\kappa), \end{aligned}$$

soit encore en tenant compte de la variation des Γ :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa + \delta^\kappa) &\simeq \\ U^\nu(x^\kappa) - \epsilon^\mu \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa) U^\alpha(x^\kappa) - \\ \delta^\mu (\Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa) + \epsilon^\rho \partial_\rho \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa)) \times \\ (U^\alpha(x^\kappa) - \epsilon^\gamma \Gamma^\alpha_{\gamma\rho}(x^\kappa) U^\rho(x^\kappa)), \end{aligned}$$

i. e. :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa + \delta^\kappa) &\simeq U^\nu(x^\kappa) - \\ \epsilon^\mu \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa) U^\alpha(x^\kappa) - \delta^\mu \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa) U^\alpha(x^\kappa) - \\ \delta^\mu \epsilon^\gamma (\partial_\gamma \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa) - \Gamma^\rho_{\gamma\alpha}(x^\kappa) \Gamma^\nu_{\mu\rho}(x^\kappa)) U^\alpha(x^\kappa). \end{aligned}$$

Un calcul analogue pour le chemin (ACD) conduit à :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\nu(x^\kappa + \delta^\kappa + \epsilon^\kappa) &\simeq U^\nu(x^\kappa) - \\ \delta^\mu \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa) U^\alpha(x^\kappa) - \epsilon^\mu \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(x^\kappa) U^\alpha(x^\kappa) - \\ \epsilon^\mu \delta^\gamma (\partial_\mu \Gamma^\nu_{\gamma\alpha}(x^\kappa) - \Gamma^\rho_{\mu\alpha}(x^\kappa) \Gamma^\nu_{\gamma\rho}(x^\kappa)) U^\alpha(x^\kappa). \end{aligned}$$

La différence entre les deux vecteurs est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa + \delta^\kappa) - \tilde{U}^\nu(x^\kappa + \delta^\kappa + \epsilon^\kappa) &\simeq \\ R^\nu_{\alpha\mu\gamma} \delta^\mu \epsilon^\gamma U^\alpha(x^\kappa), \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} R^\nu_{\alpha\mu\gamma} = \\ \partial_\mu \Gamma^\nu_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma \Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\rho_{\gamma\alpha} \Gamma^\nu_{\mu\rho} - \Gamma^\rho_{\mu\alpha} \Gamma^\nu_{\gamma\rho} \end{aligned} \quad (103)$$

$R^\nu_{\alpha\mu\gamma}$ sont, comme nous allons le vérifier, les composantes d'un tenseur : le *tenseur de Riemann*⁵⁵ où *tenseur de courbure*. Il mesure, comme l'indique le calcul précédent, le « défaut de parallélisme » au second ordre.

Le tenseur de Riemann est défini formellement par l'application de $\mathcal{H}^3(M)$ dans $\mathcal{H}(M)$ qui associe aux vecteurs U, V, W le *vecteur de Riemann* noté⁵⁶ $R(U, V)W$ défini par :

$$R(U, V)W := (\nabla_U \nabla_V - \nabla_V \nabla_U - \nabla_{[U, V]})W. \quad (104)$$

Ex. 7.10 :

1. Montrer, en utilisant la définition, que $R(U, V, W)$ définit bien un tenseur. On aura intérêt à traiter séparément chacun des trois arguments U, V, W .
2. Montrer, par un calcul direct, que les composantes de R sont bien données par (103).

On peut former par contraction du tenseur de courbure deux quantités importantes dans les applications⁵⁷ :

- Le *tenseur de Ricci*, Ri , dont les composantes sont données par $R_{\mu\nu} := R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$.
- Le *scalaire de courbure* $\mathcal{R} := R^\mu_{\mu}$, ce dernier n'existe que si M possède une métrique.

Un autre effet que la courbure est contenu dans le transport parallèle : il correspond à

⁵⁵La position des indices du du tenseur de Riemann est conventionnelle et varie, malheureusement, d'un auteur à l'autre.

⁵⁶L'intérêt de cette notation provient du fait qu'elle permet de considérer $R(U, V)$ comme un vecteur agissant sur W .

⁵⁷L'emploi de la même lettre R pour désigner les trois objets différents que sont le tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci et le scalaire de courbure est d'un usage courant dans les calculs, où les objets sont identifiés par leur nombre de composantes.

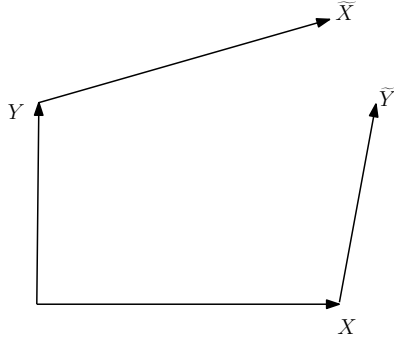


FIG. 7 – Effet de la torsion sur le parallélogramme construit sur X et Y .

l'impossibilité de fermer un «parallélogramme» construit sur deux vecteurs infinitésimaux. Un autre tenseur, appelé *tenseur de torsion*, permet caractériser cet effet (Fig 7). Pour le visualiser considérons les points $\{A, B, C\}$ comme définissant deux vecteurs infinitésimaux d'origine commune A . Convenons d'appeler X le vecteur défini par (AB) et Y celui défini par (AC) . Leurs composantes dans la base locale $\{e_\mu\}$ sont : $X^\mu = \epsilon^\mu$ et $Y^\mu = \delta^\mu$, respectivement. Transportons parallèlement chaque vecteur le long de l'autre : X est transporté le long de Y et réciproquement. On a :

$$\begin{aligned}\tilde{X}^\nu(x^\kappa + \delta^\kappa) &\simeq X^\nu(x^\kappa) - \delta^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu(x^\kappa) X^\alpha(x^\kappa), \\ \tilde{Y}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa) &\simeq Y^\nu(x^\kappa) - \epsilon^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\nu(x^\kappa) Y^\alpha(x^\kappa),\end{aligned}$$

soit encore,

$$\begin{aligned}\tilde{X}^\nu(x^\kappa + \delta^\kappa) &\simeq X^\nu(x^\kappa) - \delta^\mu \epsilon^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu(x^\kappa), \\ \tilde{Y}^\nu(x^\kappa + \epsilon^\kappa) &\simeq Y^\nu(x^\kappa) - \epsilon^\mu \delta^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu(x^\kappa).\end{aligned}$$

On constate que les extrémités des vecteurs transportés ne coïncident pas en général, en effet :

$$\begin{aligned}(\tilde{Y} + X)^\nu - (\tilde{X} + Y)^\nu &= -\delta^\mu \epsilon^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu + \epsilon^\mu \delta^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\nu \\ &= \epsilon^\mu \delta^\alpha T_{\mu\alpha}^\nu,\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$T_{\mu\alpha}^\nu = \Gamma_{\mu\alpha}^\nu - \Gamma_{\alpha\mu}^\nu, \quad (105)$$

qui sont les composantes du tenseur de torsion.

Ex. 7.11 : Vérifier, à l'aide de (93), que les quantités $T_{\mu\alpha}^\nu$, définies ci-dessus, sont bien les composantes d'un tenseur.

La géométrie différentielle définit le tenseur de torsion comme l'application de $\mathcal{H}^2(M)$ dans $\mathcal{H}(M)$ qui associe aux vecteurs U, V le vecteur $T(U, V)$ défini par :

$$T(U, V) := \nabla_U V - \nabla_V U - [U, V].$$

Ex. 7.12 : Une autre méthode permettant de faire apparaître les effets de la courbure et de la torsion lors du transport parallèle est de calculer le commutateur de deux dérivées covariantes.

1. Expliquer brièvement pourquoi?
2. Montrer que l'on a :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = R^\alpha_{\sigma\nu\mu} V^\sigma + T^\epsilon_{\nu\mu} \nabla_\epsilon V^\alpha. \quad (106)$$

Pour clore cette section remarquons que les notions introduites ici sont locales. Le tenseur de Riemann caractérise la courbure au voisinage d'un point, et on dira qu'un espace pour lequel le tenseur de courbure est identiquement nul est *localement plat*. Cependant, la connaissance de la géométrie locale ne dit rien sur la «forme globale» de l'espace, c'est-à-dire sa topologie. Ainsi, l'espace euclidien usuel, qui est *globalement plat*, est *a fortiori* localement plat. Mais, on peut montrer par exemple qu'un cylindre est également localement plat.

7.2.8 Connexion et métrique

Notre variété M n'est, pour l'instant, munie que d'une structure : la connexion. Une seconde structure, très fondamentale puisqu'elle permet de définir a notion de distance, est fournie par la définition d'une métrique. La définition, donnée au paragraphe 7.1.9, s'adapte immédiatement dans le cadre d'une variété M , l'espace vectoriel E étant ici l'espace tangent au point $P : T_P M$. Cela signifie que contrairement au cas minkowskien, g dépend de sa position sur M , c'est un champ de tenseur. Notons que si

g est définie positive M est dite *riemannienne* et, *pseudo-riemannienne* sinon⁵⁸.

Nous allons imposer à la connexion deux conditions. La première est de conserver le produit scalaire $g(U, V)$ de deux vecteurs par transport parallèle. Ce qui se traduit par :

$$\nabla_W (g(U, V)) = 0, \quad (107)$$

les vecteurs U, V étant transportés parallèlement le long de la courbe engendrée par W . Une connexion vérifiant la *condition de compatibilité* (107) est dite *connexion métrique*.

Ex. 7.13 : Montrer que la condition de compatibilité entraîne que la quantité :

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \quad (108)$$

est constante le long de la géodésique $x(\lambda)$, paramétrée par λ .

Ecrit en composante et avec l'aide de (100) et (92) la condition de compatibilité (107) devient $W^\kappa U^\mu V^\nu \nabla_\kappa g_{\mu\nu} = 0$, soit encore :

$$\nabla_\kappa g_{\mu\nu} = 0. \quad (109)$$

Remarquons que cette relation implique que pour un tenseur T quelconque on a toujours :

$$\nabla_\kappa g_{\mu\nu} T^{\dots} = g_{\mu\nu} \nabla_\kappa T^{\dots}$$

En développant l'équation (109) à l'aide de (98) puis en permutant les indices dans l'équation obtenue on aboutit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\beta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\beta g_{\mu\beta} &= 0, \\ \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta g_{\beta\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g_{\nu\beta} &= 0, \\ \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^\beta g_{\beta\alpha} - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta g_{\mu\beta} &= 0. \end{aligned}$$

En soustrayant les deux dernières équations de la première et en tenant compte de la symétrie

⁵⁸La métrique g est souvent dite *indéfinie* dans ce cas.

de g il vient :

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\mu\alpha} &= \\ (\Gamma_{\alpha\mu}^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta) g_{\nu\beta} + (\Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}^\beta) g_{\mu\beta} - \\ (\Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\nu\mu}^\beta) g_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Cette équation nous permet d'introduire la seconde condition qui est d'imposer la symétrie des symboles de connexion dans leurs indices inférieurs, ce qui correspond à exiger que la torsion soit nulle. Une telle connexion est dite *symétrique*. Dans ce cas, les deux premiers termes de l'expression précédente s'annulent et on obtient l'importante relation :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2} g^{\alpha\kappa} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (110)$$

Dans ce contexte les symboles de connexion sont fréquemment appelés *symboles de Christoffel*.

Ex. 7.14 : Montrer que pour une métrique diagonale on a les relations :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \quad (111)$$

$$\Gamma_{\mu\mu}^\alpha = -\frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \partial_\alpha g_{\mu\mu} \quad (112)$$

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha = +\frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \partial_\mu g_{\alpha\alpha} \quad (113)$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = +\frac{1}{2g_{\alpha\alpha}} \partial_\alpha g_{\alpha\alpha} \quad (114)$$

où α, β, γ ont des valeurs différentes et où il n'y a pas de sommation sur les indices répétés.

L'intérêt d'une connexion métrique et symétrique est triple. On a, en premier lieu le résultat suivant :

– Sur une variété riemannienne où pseudo-riemannienne il existe une unique connexion symétrique compatible avec la métrique, cette connexion particulière, dite de Lévi-Civita, est donnée par (110).

En second lieu, cette connexion est la seule possible en relativité générale⁵⁹. Enfin, l'expression (110) permet le calcul du tenseur de

⁵⁹Parmi les autres théories de la gravitation, qui n'ont pas été réfutées par l'expérience, la théorie de Cartan adopte une connexion non symétrique, *i.e.* une torsion non-nulle.

Riemann à partir de la métrique, ainsi qu'une analyse de ses symétries.

Ex. 7.15 : Montrer que l'on a les relations :

$$R_{\nu\alpha\mu\gamma} = g_{\sigma\beta}(\Gamma_{\nu\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\mu}^{\beta} - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta}) + \frac{1}{2}(\partial_{\mu\alpha}^2 g_{\gamma\nu} - \partial_{\mu\nu}^2 g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma\alpha}^2 g_{\mu\nu} + \partial_{\gamma\nu}^2 g_{\mu\alpha}) \quad (115)$$

$$\begin{aligned} R_{\nu\alpha\mu\gamma} &= -R_{\nu\alpha\gamma\mu} \\ R_{\nu\alpha\mu\gamma} &= -R_{\alpha\nu\mu\gamma} \\ R_{\nu\alpha\mu\gamma} &= R_{\mu\gamma\nu\alpha} \\ R_{\nu\mu} &= R_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (116)$$

Deux relations importantes peuvent également être démontrées pour une connexion de Lévi-Civita, ce sont les *première et seconde identités de Bianchi* :

$$R^{\nu}{}_{\alpha\mu\gamma} + R^{\nu}{}_{\gamma\alpha\mu} + R^{\nu}{}_{\mu\gamma\alpha} = 0, \quad (117)$$

$$\nabla_{\nu} R^{\kappa}{}_{\alpha\mu\gamma} + \nabla_{\mu} R^{\kappa}{}_{\alpha\gamma\nu} + \nabla_{\gamma} R^{\kappa}{}_{\alpha\nu\mu} = 0. \quad (118)$$

Ex. 7.16 : Montrer, en contractant la seconde identité de Bianchi sur κ et μ que l'on a :

$$\nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\alpha\gamma\nu} = \nabla_{\gamma} R_{\alpha\nu} - \nabla_{\nu} R_{\alpha\gamma} \quad (119)$$

en déduire :

$$\nabla_{\nu} \mathcal{R} = 2\nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\nu}. \quad (120)$$

Montrer que le tenseur d'Einstein :

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathcal{R}, \quad (121)$$

est conservatif, *i.e.* vérifie :

$$\nabla_{\mu} G^{\mu\nu} = 0. \quad (122)$$

Notons qu'en dimension quatre, les propriétés de symétrie entraînent que le tenseur de Ricci est le seul tenseur d'ordre deux que l'on puisse former par contraction du tenseur de Riemann, les autres possibilités donnant soit 0 soit un changement de signe. De même, le scalaire de courbure est le seul scalaire que l'on puisse former par contraction du tenseur de Riemann. On peut également montrer, toujours en dimension quatre, que le tenseur de Riemann est *l'unique* tenseur d'ordre quatre linéaire en les dérivées secondes de g (et leurs contractions avec g).

Pour résumer, le point important de cette section est que la donnée d'une métrique permet de déterminer explicitement la connexion de Lévi-Civita ainsi que le tenseur de Riemann.

8 Références bibliographiques

Nous donnons ci-dessous une liste des ouvrages utilisés lors de la rédaction de ces notes. Les abréviations C, Ch, E, M, Me, Mq, RR et RG indiquent le contenu : Cosmologie, Champs, Exercices corrigés, Mathématiques, Mécanique, Mécanique quantique, Relativité Restreinte et Relativité Générale. Les * indiquent le «degré de lisibilité» estimé pour un étudiant en première année de maîtrise : de «très lisible» **** à «niveau plus avancé» *.

- [9] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation”, Freeman and Co. (1973). **(C, M, RR, RG).
- [10] M. Nakahara, “Geometry, Topology and Physics”, IOP Publishing, (1990).*(M).
- [11] J. Peacock, “Cosmological Physics”, Cambridge University Press, (1999). *(C, Ch).
- [12] B. Shutz, “Geometrical methods of mathematical physics”, Cambridge University Press, (1988). **(M).
- [13] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, John Willey & Sons, Inc., (1972). **(C, RR, RG).

Références

- [1] A. O. Barut, “Electrodynamics and classical theory of fields and particles”, Dover, (1980). **(Ch, RR).
- [2] S. Carroll, “Spacetime and Geometry : An Introduction To General Relativity”, Benjamin Cummings (2003); “Lectures notes on General Relativity”, gr-qc/9712019. *** (C,M,RR,RG)
- [3] A. Einstein, “The Meaning of Relativity”, Chapman & Hall, (1991). **(C, RR, RG).
- [4] R. P. Feynman, F. B. Moringo, W. G. Wagner, “Feynman Lectures on Gravitation”, B. Hatefield Ed., Addison-Wesley Publishing Company, (1995). *(RG, Ch).
- [5] R. Godement, “Cours d’algèbre”, Hermann, (1966). ****(M)
- [6] R. Hakim, “Gravitation Relativiste”, InterEditions/Editons du CNRS, (1994). ****(C, RR, RG).
- [7] J. N. Islam, “An Introduction to mathematical cosmology”, Cambridge University Press, (1991). *(C).
- [8] A. P. Lightman, W. H Press, R. H. Price, S. A. Teukolsky, “Problem book in relativity and gravitation”, Princeton University Press, (1979). *** (E, RR, RG)